Skriptum Mathematische/Stochastische Modelle

Markus Klemm.net

SS 2016

Inhaltsverzeichnis

Einführung Realer Prozess $\Rightarrow$ Beobachtung $\Rightarrow$ Empirische Annahmen $\Rightarrow$ Math. Modell $\rightarrow$ Lösung $\Rightarrow$ Vorraussagen $\Rightarrow$ Beobachtung

Beispiel Radioaktiver Zerfall Annahmen:

n Anzahl der Atomkerne zum Zeitpunkt t $n = n(t)$

Δn Anzahl der zerfallenen Atomkerne im Zeitraum Δt

$$\begin{matrix} \Delta n \sim n \\ \Delta n \sim \Delta t \end{matrix} \Rightarrow \Delta n \sim n \cdot \Delta t \Rightarrow \Delta n = -\lambda n \Delta t (\lambda > 0)$$

$$\frac{\Delta n}{\Delta t} = -\lambda n \quad \Delta t \to 0$$

$$\frac{dn}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta n}{\Delta t} = -\lambda n$$

$$n'(t) = -\lambda n$$

Diff-Gleichung 1. Ordnung, Anfangsbedingung: $n(0) = n_0$

Lösung $n' + \lambda n = 0 \quad n = Ce^{-\lambda t}$ allg. Lösung ($C \in \mathbb{R}$) $\curvearrowright$ $n = n(t) = n_0 e^{-\lambda t}$ (λ - Zerfallskonstante)

Halbwertszeit $n(T) = n_0 e^{-\lambda T} = \frac{n_0}{2}$
$e^{-\lambda T} = \frac{1}{2}$
$-\lambda T = \ln \frac{1}{2} = \ln 1 - \ln 2$
$\lambda = \frac{\ln 2}{T}$

Deterministische Modelle DGL

Stochastische Modelle ~ Verteilungsfunktion

Unscharfe Modelle Fuzzy Logik

1 Fuzzy Logik

1.1 Unscharfe Menge

1.1.1 Definition und Darstellung

(Klassische) Menge A: Entweder $x \in A$ oder $x \notin A$

Beispiel $A = \{$ junge Frauen $\}$
x_n - n-jährige Frau
$x_{20} \in A, x_{30} \in A(?), x_{29} \in A, x_{30} \notin A??$
Zugehörigkeitsgrad

$$\mu_A(x) \in [0; 1] \tag{1}$$

Maß für Mitgliedschaft von x in A

Beispiel $\mu_A(20) = 1, \mu_A(30) = 0,7, \mu_a(40) = 0,3, (x_n \triangleq n)$
Zugehörigkeitsfunktion $x \to (\mu_A(x),\ x \in G$

$$\{(x, \mu_A(x)) : x \in G, \mu_A(x) \in [0, 1]\}$$

Unscharfe Menge A oder Fuzzy Menge A

Bezeichnungen A,B, JUNG, ALT…

Darstellungen

1. Wertetabelle
   $G = \{$ Städte in D $\}$, SCHÖN $\triangleq$ „schöne Stadt“
   $\vec{\mu_A} = (0,3; 0,5; 0,6; 0,7)$
2. Analytisch (Funktionsgleichung
   Beispiel $A =$ NAHENULL $: x \approx 0$
   $\mu_A(x) = \frac{1}{1+x^2}(x \in \mathbb{R})$
3. Grafisch
   $G : \{$ Lebensalter $\} \triangleq [0, 100]; A$-JUNG

Spezielle unscharfe Mengen

- Leere Menge $\emptyset : \mu_\emptyset(x) = 0\ \forall x \in G$
- Universalmenge $E : \mu_E(x) = 1\ \forall x \in G$
- scharfe Menge $A : \mu_A(x) = \begin{cases} 0 & x \notin A \\ 1 & x \in A \end{cases}$

Symbolische Darstellung:

1. G diskret $A = \frac{\mu_1}{x_1} + \frac{\mu_2}{x_2} + \cdots + \frac{\mu_n}{x_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mu_i}{x_i}$
2. G stetig $\frac{\int_{x \in G} \mu_A(x)}{x}$

1.1.2 Einige Eigenschaften und Typen

Höhe einer unscharfen Menge A

$$h(A) = \sup_{x \in G} \mu_A(x)$$

$h(A) = 1$ normalisiert Normalisierung

$$\mu_A^*(x) = \frac{\mu_A(x)}{h(A)}$$

Mächtigkeit von A

1. G endlich : $\mathrm{card}(A) = \sum_{x \in G} \mu_A(x)$
2. G unendlich: $\mathrm{card}(A) = \int_G \mu_A(x)dx$

Relative Mächtigkeit

1. $\mathrm{card}_G(A) = \frac{\mathrm{card}(A)}{N}$, N Anzahl der Elemente von G

2. $\mathrm{card}_G(A) = \frac{\mathrm{card}(A)}{\int\limits_G dx}$

α-Niveaumenge: $A_\alpha = \{x \in G : \mu_A(x) \geq \alpha\}, \alpha \in [0,1]$
strenge α-Niveaumenge: $A^*_\alpha = \{x \in G : \mu_A(x) > \alpha\}$ Träger von A: $\sup A = A^*_0$ Es gilt A scharfe Menge $(\neq \emptyset) \Leftrightarrow \mu_A(x) = 1 \; \forall x \in \sup A$

Beispiel $G = \{a,b,c,d\} : A = \{a;0,9);(b;0,2);(c;0,5);(d;0,1)\}$
$\alpha = 0,1 : A_{0,1} = \{a,b,c,d\}$
$\alpha = 0,2 : A_{0,2} = \{a,b,c\}$
$\alpha = 0,5 : A_{0,5} = \{a,c\}$
$\alpha = 0,9 : A_{0,9} = \{a\}$
Es gilt $\alpha_1 \leq \alpha_2 \to A_{\alpha_2} \subset A_{\alpha_1} \; \forall \alpha_1\alpha_2 \in [0;1]$ Repräsentationssatz

$$\mu_A(x) = \sup_\alpha(\min(\alpha;\mu_{A_\alpha}(x))$$

Erläuterung: Beispiel siehe oben: $x = b$
$\forall \alpha \in [0;0,2] : b \in A_\alpha \Rightarrow \mu_{A_\alpha}(b) = 1$
$\forall \alpha \in (0,2;1) : b \notin A_\alpha \Rightarrow \mu_{A_\alpha}(b) = 0$
d.h. $\min(\alpha;\mu_{A_\alpha}(b)) = \alpha$ für $\alpha \in [0;0,2]$
$\min(\alpha;\mu_{A_\alpha}(b)) = 0$ für $\alpha \in (0,2;1]$
$\curvearrowright \sup\limits_\alpha(\min(\alpha;\mu_{A_\alpha}(b)) = \sup \alpha = 0,2 \quad \alpha \in [0;0,2] = \mu_A(b)$

Wichtige Typen von Fuzzy-Mengen Grundmenge $G = [a;b]$

1. $\mu_A(x)$ monoton wachsend $\begin{cases} \text{stückweise linear} \\ \text{S-förmig} \triangleq \text{kubische Parabel} \end{cases}$

2. $\mu_A(x)$ monoton fallend

3. μ_A dreiecksförmig

4. μ_A trapezförmig

Analytisch Geradengleichung $\frac{\mu-\mu_1}{x-x_1} = \frac{\mu_2-\mu_1}{x_2-x_1}$
$x \in [c_1;m] : \frac{\mu-0}{x-c_1} = \frac{1-0}{m-c_1}, \mu = \frac{x-c_1}{m-c_1}$
$x \in [m;c_2] : \frac{\mu-0}{x-c_2} = \frac{1-0}{m-c_2}$
$\curvearrowright \mu = \frac{x-c_2}{m-c_2} = \frac{c_2-x}{c_2-m} \; \mu_A(x) = \begin{cases} 0 & , \; x \in [a;c_1] \cup [c_2,b] \\ \frac{x-c_1}{m-c_1} & , \; x \in [c_1;m] \\ \frac{c_2-x}{c_2-m} & , \; x \in [m;c_2] \end{cases}$

1.1.3 Gleichheit und Teilmengen

Gleichheit $A = B \Leftrightarrow \mu_A(x) = \mu_B(x) \; \forall x \in G$

Teilmengen $A \subset B \Leftrightarrow \mu_A(x) \leq \mu_B(x)\ \forall x \in G$
offenbar $\emptyset \subset A \subset E\ \forall A; A \subset B \wedge B \subset A \Leftrightarrow A = B$

Beispiel Wassertemperaturen im Freibad $G = \{18; 19; \ldots; 24\}$
WARM $= \{(18; 0,2); (19; 0,3); (20; 0,4); (21; 0,5); (22; 0,7); (23; 0,9); (24; 1)\}$
LAU $= \{(18; 0,3); (19; 0,4); (20; 0,6); (21; 0,8); (22; 1); (23; 1); (24; 1) \Rightarrow$ WARM $\subset$ LAU
Konzentrationen $\mathrm{kon}_n\, A = \{(x; [\mu_A(x)]^n), x \in G\}$
Dilatationen $\mathrm{dil}_n\, A = \{(x; \sqrt[n]{\mu_A(x)}), x \in G\}$
Es gilt $\mathrm{kon}_n\, A \subset \mathrm{kon}_m\, A \subset A \subset \mathrm{dil}_m\, A \subset \mathrm{dil}_n\, A$
für $1 < m < n$
Sprachliche Verstärkung $\Rightarrow$ numerische Abschwächung und umgekehrt

Beispiel $A =$ NAHE NULL
$\mu_A(x) = e^{-x^2}$
$B = \mathrm{kon}_3\, A = [\mu_A(x)]^3 = e^{-3x^2}$
$C = \mathrm{dil}_3\, A = [\mu_A(x)]^{\frac{1}{3}} = e^{-\frac{x^2}{3}}$

Linguistische Modifikationen

Beispiel $A =$ SCHÖNE STADT

1.1.4 Klassische Mengenoperationen

Vereinigung („oder"): $C = A \cup B : \mu_C(x) = \max(\mu_A(x); \mu_B(x))$
Durchschnitt („und"): $D = A \cap B : \mu_D(x) \min(\mu_A(x), \mu_B(x))$
Komplement („nicht"): $A^C = A : \mu_A^C(x) = 1 - \mu_A(x)$

Beispiel Computerproduktion
$G = \{4; 5; 6; 7; 8; 9\}$
Vertretbare Produktionskosten $A = \{(4; 0); (5; 0,1); (6; 0,5); (7; 1); (8; 0,8); (9; 0)\}$
Absetzbarkeit (pro Tag) $B = \{(4; 1); (5; 0,9); (6; 0,8); (7; 0,4); (8; 0,1); (9; 0)\}$

Mengengesetze

Anmerkung

1. $\cap \to \cup, E \to \emptyset$ z.B. $A \cap \emptyset = \emptyset \Leftrightarrow A \cup E = E$
2. Nachweis, z.B. $A \cap (A \cup B) = A$
   tatsächlich $\mu_{LS}(x) = \min(\mu_A(x), \max(\mu_A(x), \mu_B(x))) = \mu_A(x) = \mu_{RS}(x)$
   Fallunterscheidung: $\mu_A(x) =: a, \mu_B(x) =: b$
   a) $a \leq b : \mu_{LS}(x) = \min(a, \underbrace{\max(a, b)}_{=b}) = a$

b) $a > b : \mu_{LS}(x) = \min(a, \underbrace{\max(a, b)}_{=a}) = a$

Nicht-interaktiv

Kartesisches Produkt $C = A \otimes B$

$$\mu_C((a,b)) = \min\{\mu_A(a), \mu_B(b)\}\ \forall (a;b) \in X \times Y$$

Beispiel $A = \{(a;0,7));(c;0,8)\}, B = \{(b;1);(c;0,3)\}$
$X = Y\{a;b;c\} \Rightarrow A \otimes B = \{((a;b);0,7);((a,c);0,3);((c;b);0,8);((c,c);0,3)\}$

1.2 Fuzzy-Control

1.2.1 Überblick

Klassisch

- Steuergröße $u(t)$
- Prozess $F(x,u,t)$
- Zustandsgröße $x(t)$

Zusätzliches Ziel

$$\int_0^{t_1} \underbrace{f(x,u,t)}_{\text{Kostenfunktion}} \; dt \to \min$$

Nachteile

- Exaktes math. Modell (F-Dgl.) oft schwierig aufzustellen, nur wichtige Zusammenhänge berücksichtigbar
- Lösung oft nur näherungsweise möglich
- keine Robustheit der Lösung

1.2.2 Fuzzifizierung

1.2.3 Inferenz

monokausal

1. Verarbeitungsregeln

(Zustand) Badewasser	(Steuerung) Zulaufwasser
KÜHL	HEISS
WARM	WARM
HEISS	KÜHL

2. Zugehörigkeitsgrade
   $\mu_{KALT}(Z, W) = 0$
   $\mu_{KUEHL}(Z, W) = \mu_{HEISS}(32) = 0,4$
   $\mu_{WARM}(Z, W) = \mu_{WARM}(32) = 0,6$
   $\mu_{HEISS}(Z, W) = \mu_{KUEHL}(32) = 0$

3. Bestimmen der Inferenzmenge

1.2.4 Defuzzifizierung

1. Zweidimensional
   a) Maximum-Mittelwert-Mehtode
   $$u^* = \frac{\alpha + \beta}{2} = 40^\circ$$
   b) Schwerpunktmethode
   $$u^* = \frac{\int_a^b u f(u)\, du}{\int_a^b f(u)\, du}$$
2. Eindimensional
   a) Singletons
   $$u^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} u_i \mu_i}{\sum \mu_i} = \frac{30 \cdot 0,4 + 40 \cdot 0,6}{0,4 + 0,6}$$
   b) Teilschwerpunkt = 36°
   $$u^* = \frac{\sum u_i \mu_i A_i g_i}{\sum \mu_i A_i g_i} \underbrace{=}_{g_i=1} \frac{30 \cdot 0,4 \cdot 10 + 40 \cdot 0,6 \cdot 10}{0,4 \cdot 10 + 0,6 \cdot 10} = 36^\circ$$

1.2.5 Allgemeine Hinweise

Schwerpunktmethode i.A. am virteilhaftesten!
Nicht-konvexe Inferenzmengen.

Beispiel Ausweichen vor Hindernis

Fuzzy-Control → Robustheit

- versch. Zugehörigkeitsfunktion
- ähnliche Messwerte
- Inferenz- und Defzuzzifizier-Verfahren

1.2.6 Beispiel Fuzzy-Control

Aufgabe: Bremesen eines Fahrzeuges
Speziell $v = 90\,kmh^{-1}, x = 100\,m$

1. Fuzzufuzierung
   a) Festlegen der unscharfen Mengen, siehe Bild 1,2,3
   b) Zugehörigkeitsgrade
      - $\mu_{NIEDRIG}(90) = 0,75, \mu_{MITTEL}(90) = 0,25$
      - $\mu_{NIEDRIG}(100) = \frac{2}{3}; \mu_{MITTEL}(100) = \frac{1}{3}$
2. Inferenz
   a) Verarbeitungsregeln

$y\backslash x$	klein	mittel	groß
sehr niedrig	schwach		
niedrig		schwach	
mittel		mittel	
hoch		stark	
sehr hoch	sehr starck		schwach

   und $\triangleq \cap \triangleq$ min
   oder $\triangleq \cup \triangleq$ max : ganze Zeile und Spalte

   b) Zugehörigkeitsgrade der Ergebnismenge (Bremsdruck)
   $\mu_{SCHWACH}(p) = \min(\mu_{NIEDRIG}(v), \mu_{MITTEL}(x)) = \min(0,75; \frac{1}{3}) = \frac{1}{3}$
   $\mu_{MITTEL}(p) = \min(\mu_{MITTEL}(v), \mu_{MITTEL}(x)) = \min(0,25; \frac{1}{3}) = 0,25$
   $\mu_{SEHRSTARK}(p) = \max(\mu_{SEHRHOCH}(v), \mu_{KLEIN}(x)) = \max(0; \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$
   (ggf. Mehrdeutigkeiten beseitigen!)
   c) Inferenzmenge
      - Max-Min-Methode: siehe Bild 4
      - Singletons
3. Defuzzifizierung
   a) Max-Mittelwert $\alpha = 2 + (2,5 - 2) \cdot \frac{2}{3} = 2,33, \beta = 3 \curvearrowright p^* = \frac{\alpha+\beta}{2} = 2,67$
   b) Schwerpunkt-Methode $p^* = 2,005$
   c) Singletons $p^* = \frac{1 \cdot \frac{1}{3} + 1,5 \cdot 0,25 + 3 \cdot \frac{2}{3}}{\frac{1}{3} + 0,25 + \frac{2}{3}} = 2,16$

1.3 Weiterführende Operationen mit unscharfen Mengen

1.3.1 t-Normen und s-Normen

$\sqcap$ - Durchschnittsoperator
$\sqcup$ - Vereinigungsoperator

$A \sqcup B = (A^C \sqcap B^C)^C$ (de Morgan)
Schreibweise
$\mu_{A \sqcap B}(x) = t(\mu_A(x); \mu_B(x))$
$\mu_{A \sqcup B}(x) = s(\mu_A(x); \mu_B(x))$
künftig: $a = \mu_A(x), b = \mu_B(x)$
Aus Axiomen $\Rightarrow t(0; a) = 0 \ \forall a \in [0; 1]$
Insbesondere: $t(0; 0) = 0$

Nachweis: $1^\circ : t(0; 1) = 0$
$4^\circ : 0 \leq t(0; a) \leq t(0; 1), \ \forall a \leq 1$
$= 0$
$\curvearrowright t(0; a) = 0$

- $s(a, b) = \mu_{A \sqcup B}(x) = \mu_{(A^C \sqcap B^C)^C}(x) = 1 - \mu_{(A^C \sqcap B^C)}(x) = 1 - t(1 - a, 1 - b)$n

1.3.2 Interaktive Verknüpfungen

1. Algebraisches Produkt $A \cdot B; \mu_A(x) =: a$ usw.
$$\text{alg}_t(a, b) = a \cdot b$$
2. Beschränktes Produkt $A \odot B$
$$\text{bes}_t(a, b) = \max[0; a + b - 1]$$
3. Drastisches Produkt $A * B$
$$\text{dra}_t(a, b) = \begin{cases} \min(a, b) & \text{für } a = 1 \lor b = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Anmerkung

1. $A \cap A = A$
$\text{alg}_t(a; a) = a^2 \neq a \ (a \neq 1)$
2. Interaktive

Beispiel Computer-Produktion

x	4	5	6	7	8	9
$a = \mu_A(x)$	0	0, 1	0, 5	1	0, 8	0
$b = \mu_B(x)$	1	0, 9	0, 8	0, 4	0, 1	0
$A \cap B$	0	0, 1	0, 5	0, 4	0, 1	0
$A \cdot B$	0	0, 09	0, 4	0, 4	0, 08	0
$A \odot B$	0	0	0, 3	0, 4	0	0
$A * B$	0	0	0	0, 4	0	0

Satz $\mathrm{dra}_t(a;b) \leq t(a;b) \leq \min(a;b)$

Nachweis $\mathrm{dra}_t(a;b) = \begin{cases} \min(a;b) & \text{für } a = 1 \vee b = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

1. $a < 1 \wedge b < 1 : \mathrm{dra}_t(a,b) = 0 \subseteq t(a,b)\ \forall a,b$
2. o.B.d.A. $a = 1 : \mathrm{dra}_t(a,b) = b \underbrace{=}_{1^0} t(b,1) \underbrace{=}_{2^0} t(1,b)\ \forall b$

   $\curvearrowright \mathrm{dra}_t(a,b) \subseteq t(a,b)\ \forall a,b \in [0;1]$
   RS: $a \leq b \quad t(a,b) \underbrace{\leq}_{4^0} t(a,1) \underbrace{=}_{1^0} a = \min(a,b)$

1.3.3 Parametrisierte Verknüpfungen

1. Hamacher-Operator

$$H_p^t(a,b) = \frac{ab}{p + (1-p)(a+b-ab)}, p \in [0;\infty)$$

   Satz 1 H_p^t monoton fallend bzgl. p
   Speziell: $H_0^t(a,b) = \frac{ab}{a+b-ab}$ algebraischer t-Quotient
   $H_1^t(a,b) = ab = \mathrm{alg}_t(a,b)$
   $\lim\limits_{p\to\infty} H_p^t(a,b) = \mathrm{dra}_t(a,b)$

2. Kompensatorische Operatoren
   Lücke zwischen $\cap$ und $\cup$ schließen

   Beispiel Kunstsammler
   A := GUT ERHALTEN; B := WERTVOLL; $x = c$: Gemälde von Cranach
   $\mu_A(c) = 0,2; \mu_B(c) = 0,9$
   Kaufen? „und“: $\mu_{A\cap B}(c) = \min(a,b) = 0,2$
   „oder“ $\mu_{A\cup B}(c) = \max(a,b) = 0,9$

3. min-max-Kompensationsoperator

$$K_\gamma = [\min(a,b)]^{1-\gamma}[\max(a,b)]^\gamma; \gamma \in [0;1]$$

4. konvexer min-max-K.-Operator

$$kK_\gamma = (1-\gamma)\min(a,b) + \gamma\max(a,b)$$

Vergleich von K_γ und kK_γ Bezeichnen $u = \min(a,b), v = \max(a,b)$:
$K_\gamma = u^{1-\gamma}v^\gamma = u(\frac{v}{u})^\gamma$ Expotentialfkt bzgl. γ
$kK_\gamma = (1-\gamma)u + \gamma v = u\gamma(v-u)$ lineare Fkt. bzgl. γ
Es gilt stets: $K_\gamma(a,b) \leq kK_\gamma(a,b)\ \forall a,b \in [0;1]$
Sei $a \leq b$ o.B.d.A.: $u = a, v = b$;
$\gamma = 0 : K_0 = a(\frac{b}{a})^0 = a, kK_0 = a$
$\gamma = 1 : K_1 = b, kK_1 = b$
K_γ konvex: $K_\gamma = K_\gamma(a,b) = a(\frac{b}{a})^\gamma$
$K'_\gamma = a(\frac{b}{a})^\gamma \ln(\frac{b}{a})$
$K''_\gamma = a(\frac{b}{a})^\gamma [\ln\frac{b}{a}]^2 > 0$

Speziell $\gamma = 0,5 : K_{0,5} = u^{\frac{1}{2}}v^{\frac{1}{2}} = \sqrt{uv}$ geom. Mittel
$kK_{0,5} = \frac{u+v}{2}$ arith. Mittel
Folglich $\sqrt{uv} \leq \frac{u+v}{2}$
Abschweifung, Beispiel: Produktion 100 Einheiten (Anfang)
1. Jahr +100% $\to$ 200 Einheiten
2. Jahr +0% $\to$ 200 Einheiten
Arith. Mittel: 50% (beide Jahre)
1. Jahr 150 Einheiten
2. Jahr 225 Einheiten
Geom. Mittel: Nicht $\sqrt{100 \cdot 0}$ Unsinn!
Vielfache $\sqrt{2 \cdot 1} = \sqrt{2} = 1,41$
41% Zuwachs im Durchschnitt
1. Jahr 141
2. Jahr $141 \cdot \sqrt{2} = 200$

1.3.4 Das Erweiterungsprinzip

Übergang: NIcht-Fuzzy-Größen $\Rightarrow$ Fuzzy-Größen

Beispiel 1 geg: $y = f(x) = x^2 + 1,\ x \in X = \{-1;0;1;2\}$
$\curvearrowright y \in Y = \{1;2;5\}$
$A = \{(-1;0,5);(0;0,08);(1;1);(2;0,4)\}$
ges.: $B = f(A)$
Lösung: $B = \{(1;0,08);(2;?);(5;0,4)\}$
Erweiterungsprinzip (einfacher Fall) $B = f(A) = \{(y,\mu_B(y))||y = f(x), x \in X\}$
mit $\mu_B(y) = \begin{cases} \sup y = f(x)\mu_A(x) & \text{falls} \quad \exists y = f(x) \\ 0 & \qquad sonst \end{cases}$
oben: $B = \{\dots;(2;1);\dots\}$

Allgemein $A_1;\dots;A_n$ unscharfe Mengen auf $X_1;\dots;X_n$

1. Schritt Kartesisches Produkt $A = A_1 \otimes A_2 \otimes \cdots \otimes A_n$ auf $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ mit $\mu_A(x_1;\dots;x_n) = \min\{\mu_A;(x_i),\ x_i \in X_i\ i = 1,\dots,n$

Beispiel $A_1 = \{(4; 0,4); (5; 1); (5; 0,5); \} \approx 5$
$A_2 = \{(2; 0,1); (3; 0,6); (4; 1); (5; 0,5)\} \approx 4$

$\mu_{A_1 \otimes A_2}(x_1, x_2)$:

$x_1 \backslash x_2$	2	3	4	5
4	0,1	0,4	0,4	0,4
5	0,1	0,6	1	0,5
6	0,1	0,5	0,5	0,5

2. Schritt Erweiterungsprinzip Analog

Beispiel 2 $y = f(x_1, x_2) = int\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$

$x_1 \backslash x_2$	2	3	4	5
4	$\frac{0,1}{3}$	$\frac{0,4}{3}$	$\frac{0,4}{4}$	$\frac{0,4}{4}$
5	$\frac{}{3}$	$\frac{}{4}$	$\frac{}{4}$	$\frac{}{5}$
6	$\frac{}{4}$	$\frac{}{4}$	$\frac{}{5}$	$\frac{}{5}$

$B = int(\frac{A_1+A_2}{2})$
$\mu_B(3) = \sup f(x_1, x_2) = 3\{0,1; 0,4; 0,1\} = 0,4$

1.4 Unscharfe Maße

1.4.1 Wahrscheinlichkeit und Möglichkeit

$A \subset \Omega$ Grundbereich; „Ereignis"

Definition 1 Mengenfunktion $F(A)$ heißt unscharfes Maß:

1. $F(\emptyset) = 0,\ F(\Omega) = 1$ (Normierung)
2. $A_1 \subset A_2 \Rightarrow F(A_1) \leq F(A_2)$ (Monotonie)
3. $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n \subset \cdots : \lim_{n\to\infty} F(A_n) = F(\lim_{n\to\infty} A_n)$ (Stetigkeit)

Folgerungen $\forall A, B \subset \Omega$:

1. $F(A \cup B) \geq \max[F(A), F(B)]$
2. $F(A \cap B) \leq \min[F(A), F(B)]$

Nachweis: $A \cap B \subset A \subset A \cup B$
Wegen (2): $F(A \cap B) \leq F(A) \leq F(A \cup B)$
Analog $F(A \cap B) \leq F(B) \leq F(A \cup B)$
$\Rightarrow F(A \cap B) \leq \min(F(A), F(B)) \triangleq (2)$
Analog (1)

Definition 2 $P(A)$ Wahrscheinlichkeit, wenn

1. $0 \leq P(A) \leq 1 \ \forall A \subset \Omega$
2. $P(\Omega) = 1$
3. $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots$ für $A_i \cap A_j = \emptyset, \ i \neq j$

Satz Wahrscheinlichkeit ist unscharfes Maß

Teil-Nachweis (Monotonie)
$A_1 \subset A_2 : P(A_2) = P(A_1 \cup (A_2 \cap A_1^C)) = P(A_1) + \underbrace{P(A_2 \cap A_1^C)}_{\geq 0} \curvearrowright P(A_1) \leq P(A_2)$

Grenzen der Wahrscheinlichkeit für Ungewissheit

Beispiel Produktionsanlage Brauchbarkeit Grundstück (Flurstück 1 und 2 einzeln zu klein, aber zusammen groß genug) $P(1) = 0, P(2) = 0, P(1 \cup 2) = 1 \curvearrowright$ keine Wahrscheinlichkeit

Definition 3 $\Pi(A)$ Möglichkeit

1. $\Pi(\emptyset) = 0; \ \Pi(\Omega) = 1$
2. $\Pi(A \cup B) = \max[\Pi(A); \Pi(B)]$

- $\Pi(A)$ unscharfes Maß
- Für Elementareignisse $\{x\}(x \in \Omega)$:
  Möglichkeitsverteilung $\pi(x) : \Omega \to [0; 1]$
  $\Rightarrow \Pi(A) = \max x \in A \ \pi(x)$
- Es gilt $P(A) \leq \Pi(A) \forall A \subset \Omega$

Beispiel A : „N isst x Brötchen zum Frühstück“

x	0	1	2	3	4	5	Σ
$P(\{x\})$	0,1	0,2	0,5	0,1	0,1	0	1
$\pi(x) = \Pi(\{x\})$	1	1	1	0,6	0,3	0,1	> 1

Wieviel kaufen: $E(X) = \sum xP(\{x\}) = 0 \cdot 0,1 + 1 \cdot 0,2 + 2 \cdot 0,5 + 3 \cdot 0,1 + 4 \cdot 0,1 = 1,9$

Aufgabe 1 Wie groß Wahrscheinlichkeit bzw. Möglichkeit ≥ 3 Brötchen isst?
Lösung: $\Pi(A) = \max x \in \{3; 4; 5\} \ \pi(x) = 0,6$
$P(A) = \sum_{x=3} P(x) = 0,2$

Definition 4 Notwendigkeit $N(A) = 1 - \Pi(A^C) = \min x \notin A \{1 - \pi(x)\} \; \forall A \subset \Omega$ Es gilt:

- $N(A \cap A^C) = \min[N(A), N(A^C)]$
- $\Pi(A) \geq N(A) \; \forall A$
- $N(A) > 0 \rightarrow \Pi(A) = 1$
- $\Pi(A) < 1 \rightarrow N(A) = 0$

Nachweis $N(A) > 0 \quad 0 \underbrace{=}_{\text{unscharfes Maß}} N(A \cap A^C) = \min[N(A), N(A^C)] \curvearrowright N(A^C) = 0$
$0 = N(A^C) = 1 - \Pi((A^C)^C) \curvearrowright \Pi(A) = 1$
$N(A) = 1 - \Pi(A^C)$
$= \min\limits_{x \notin A}\{1 - \pi(x)\}$

Beispiel A^C Stein fällt nach oben: unmöglich
A^C Stein fällt nach unten: notwenig

x	0	1	2	3	4	5
$\pi(x)$	1	1	1	0,6	0,3	0,1

Beispiel Notwendigkeit, dass N. isst: 0 Brötchen $\triangleq A$
≤ 2 Brötchen $\triangleq B$
> 2 Brötchen $\triangleq C$
$N(A) = \min\limits_{x>0}\{1 - \pi(x)\} = \min\{\underbrace{1 - 1}_{0}, \ldots\} = 0$
$N(B) = \min\limits_{x>2}\{1 - \pi(x)\} = \min\{1 - 0,6; 1 - 0,3; 1 - 0,1\} = 0,4$
$N(C) = \min\limits_{x\leq 2}\{1 - \pi(x)\} = \min\{1 - 1; \ldots\} = 0$

1.4.2 Einige Verallgemeinerungen

Beispiel $\triangle(A) = \min\limits_{x \in A} \pi(x) = \pi(0) = 1$
$\triangledown(A) = 1 - \max\limits_{x \notin A} \pi(x) = 1 - \max\limits_{x>0} \pi(x) = 1 - \max\{1; \ldots\} = 0$
$\triangle(B) = \min\limits_{x \in B} \pi(x) = 1$
$\triangledown(B) = 1 - \max\limits_{x>2} \pi(x) = 1 - \max\{0,6; \ldots\} = 1 - 0,6 = 0,4$
$\triangle(C) = \min\limits_{x \in C} \pi(x) = 0,1$
$\triangledown(C) = 1 - \max\limits_{x\leq 2} \pi(x) = 1 - 1 = 0$

1.4.3 Unschärfemaße

Lokale Unschärfe $x \in G \approx$ unscharfe Menge: $\mu_A(x)$
Zu A: Entropiemaße, Scharfe Mengen: $A \cap A^C = \emptyset$
$D = A \cap A^C \triangleq$ Maß für Unschärfe von G

$\mu_D(x) = \min(\underbrace{\mu_A(x)}_{a}, 1 - \underbrace{\mu_A(x)}_{a})$
Es gilt $\min(a,b) = \frac{1}{2}[a + b - |a - b|]$
Tatsächlich: O.B.d.A: $a \geq b : LS = \min(a,b) = b$
$RS = \frac{1}{2}[a + b - (a - b)] = b$
$\curvearrowright \mu_D(x) = \frac{1}{2}[a + (1 - a) - |a - (1 - a)|] = \frac{1}{2}[1 - |2a - 1|]$
Shannonsche Unschärfemaß

$$\underbrace{\mu_A(x)}_{C} \ln \underbrace{\mu_A(x)}_{C}$$

$\lim\limits_{c\to 0} c \ln c = \lim\limits_{c\to 0} \frac{\ln c}{\frac{1}{c}} \underbrace{=}_{\frac{-\infty}{\infty}} \lim\limits_{c\to 0} \frac{1}{c(-\frac{1}{c^2})} = \lim\limits_{c\to 0}(-c) = 0$

1.5 Fuzzy-Aussagenlogik

1.5.1 Grundlagen

Syntax

1. Alphabet
2. Regeln: Zulässige Ausdrücke (ZA)

$$\Omega = \{\text{ZA}\}$$

Beispiel

1. $\neq a \wedge \neq (b \to c)$ ZA
2. $0 \vee p \leftrightarrow q \to 1$ ZA
3. $x \vee y \wedge z$ kein ZA
4. $\neq (\alpha \wedge \beta)$ kein ZA
5. $x \wedge y \Leftrightarrow< y \wedge x$ kein ZA

Semantik

1. δ: Wahrheitswert

$$\forall A \in \Omega \to \delta(A) \in [0; 1]$$

2. Operatoren
3. ZA
    - Tautologien
    - erfüllbar

- unerfüllbar

4. Metasprache $\Leftrightarrow, \Rightarrow$ z.b. $a \leftrightarrow b \Leftrightarrow a \to b \land b \to a$
   speziell $\delta(A) = \{0; 1\}$: klass. Aussagenlogik
   $\delta(A) = \{0; \frac{1}{2}; 1\}$: Lukasiewicz-Logik

Beispiel Informatiker mit Kenntnissen in Rechnernetzen und Betriebswirtschaft haben gute Berufsaussichten in der Entwicklung oder im Mangement.

Informatiker NN

a: NN hat Kenntnisse in Rechernetzen: $\delta(a) = 0,9$ b: NN hat Kenntnisse in Betriebswirtschaft $\delta(b) = 0,7$ c: Es bestehen gute Entwicklungsaussichten in Entwicklung: $\delta(c) = 0,8$ d: Es bestehen gute Beufsaussichten im Mangement $\delta(d) = 0,4$

Gesamtaussage $A(a; b; c; d) : a \land b \to c \lor d$ mit $\delta(\underbrace{a \land b} \to \underbrace{c \lor d}) = \min[1; 1 + \delta(c \lor d) - \delta(a \land b)] = \min[1; 1 + \max(\delta(c); \delta(d)) - \min(\delta(a); \delta(b))] == \min[1; 1 + \max(0,8; 0,4) - \min(0,7; 0,9)] = \min[1; 1 + 0,8 - 0,7] = 1$ w.A.

1.5.2 Logische Gesetze

Dualität: $\land \leftrightarrow \lor$
$0 \leftrightarrow 1$
z.B. neutrales Element $a \lor 0 \Leftrightarrow a$

Nachweis: Mit Fallunterscheidung:

Beispiel

$\delta() \leq \delta()$	$\delta(a \land b)$	$\neg(a \land b)$	$\neg a$	$\neg b$	$\neg a \lor \neg b$
a b	$\delta(a)$	$1 - \delta(a)$	$1 - \delta(a)$	$a - \delta(b)$	$1 - \delta(a)$
b a	$\delta(b)$	$1 - \delta(b)$	$1 - \delta(a)$	$1 - \delta(b)$	$1 - \delta(b)$

Anmerkung Doppelte Negation $\neg\neg(a) = a$
Konjunktive (diskunktive) Normalform

Satz 1

Beispiel $(a \lor b) \land \neg(b \land (\neq a \lor \neg b))$
$\Leftrightarrow (a \lor b) \land (\neg b \lor \neg(\neg a \lor \neg b))$
$\Leftrightarrow (a \lor b) \land (\neg b \lor (a \land b))$
$\Leftrightarrow (a \lor b) \land (\neg b \lor a) \land (\neg b \lor b)$

$\to$ und $\leftrightarrow$ Operatoren

Satz 2

1. $a \leftrightarrow b \Leftrightarrow (a \to b) \land (b \to a)$
2. $a \to b \Leftrightarrow \neg b \to \neg a$

Nachweis

$\delta() \leq \delta()$	$a \to b$	$\neg b$	$\neg a$	$\neg b \to \neg a$
$a\ b$	1	$1-\delta(b)$	$1-\delta(a)$	1
$b\ a$	$1+\delta(b)\neg\delta(a)$	$1-\delta(b)$	$1-\delta(a)$	$1+\delta(b)-\delta(a)$

Beispiel Wenn man sich mit den log. Grundlagen der Fuzzy-Logik ausgiebig beschäftigt, dann versteht man die Anwendungen der Fuzzy-Logik richtig. Kontraposition: selbständig!

Spezielle Gesetze der klass. Aussagenlogik Nur klassisch:

1. $a \wedge \neg a \Leftrightarrow 0$
   Fuzzy: NEIN z.B. $\delta(a) = 0,3; \delta(\neg a) = 0,7; \delta(a \wedge \neg a) = \min(0,3; 0,7) = 0,3 \neq 0$

2. $a \to b \Leftrightarrow \neg a \vee b$

a	b	$a \to b$	$\neg a$	$\neg a \vee b$	$(a \to b) \Leftrightarrow \neg a \vee b$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1
1	1	1	0	1	1

Aber $\delta(a) = \delta(b) = \frac{1}{2}$
$\delta(a \to b) = 1$
$\delta(\neg a \vee b) = \max(1-\delta(a); \delta(b)) = \frac{1}{2}$

Tautologie (klassisch!)

Beispiel $(a \wedge \neg(b \vee c)) \to (b \leftrightarrow c)$
$\Leftrightarrow \neg(a \wedge \neg(b \vee c)) \vee ((b \to c) \wedge (c \to b))$
$\Leftrightarrow (\neg a \vee (b \vee c)) \vee ((\neg b \vee c) \wedge (\neg c \vee b))$
$\Leftrightarrow (\neg a \vee b \vee c \vee \neg b \vee c) \wedge (\neg a \vee b \vee c \vee \neg c \vee b) \Leftrightarrow 1$

Ausblick (klassisch)

1. $\to \leftrightarrow \Leftrightarrow\ \wedge \vee$

2. $A \vee B \Leftrightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)$

3. Definiieren $f(A, B) = \neg(A \wedge B)$

Es gilt

1. $A \wedge B \leftrightarrow f(f(A, B), f(A, B))$

2. $\neg A \leftrightarrow f(A, A)$

Klassische Schlussfiguren

1. Modus ponens
2. Modus tollens
3. Modus barbara

Zu Modus ponens $(a \to b) \wedge a \to b \Leftrightarrow \neg(\underbrace{a \to b}_{\neg a \vee b}) \wedge a) \vee b$
$\Leftrightarrow \neg(\neg a \vee b) \vee \neg a \vee b \Rightarrow (a \vee \neg a \vee b) \wedge (\neg b \vee \neg a \vee b) \Rightarrow 1$

Aber $\delta(a) = 0,8; \delta(b) = 0,3$
$\delta(a \to b) = \min(1; 1 + \delta(b) - \delta(a)) = 0,5$
$\Rightarrow \delta((a \to b) \wedge a \to b) = \min(1; 1 + 0,3 - \min(0,5; 0,8)) = 0,8 \neq 1$
zu tollens und barbara analog (klassische Gesetzmäßigkeiten gelten nicht)

1.5.3 Approximatives Schließen

Erweiterter Modus ponens $A \to B$
A' B' bzw.: $(A \Rightarrow B) \wedge A' \to B'$

Beispiel Rote Kirschen sind süss

1. „KRISCHFARBE X = ROT“
2. „GESCHMACK Y IST SÜSS“
3. „KRISCHFARBE X IST SEHR ROT“

$\to b'$: GESCHMACK Y IST MEHR ALS SÜSS
$(A \to B) \wedge A' \to B'$ Zu 1) $\mu_{A\to B}(x, y) = I \ldots (\underbrace{\mu_A(x)}_{a}; \underbrace{\mu_B(y)}_{b})$ siehe Heft

Zu 2) $\mu'_B(y) = I \ldots (\mu_A(x); \mu_B(y)) * \mu'_A(x)$ mit $(*)$: max-t-Komposition (Erweiterungsprinzip, deshalb max, $\wedge$ deshalb t)

Beispiel MAMDANI-Implikationsoperator; $t \triangleq \min$
geg: $A = \{(1; 0,3); (2; 0,6); (3; 1); (4; 0)\}$
$B = \{(1; 0,2); (2; 1); (3; 0,6); (4; 0,3)\}$
Sei $A' = \{(1; 1); (2; 0,5); (3; 0,4); (4; 0,1)\}$
ges.: B'

zu A)

$x \backslash y$	1	2	3	4
1	0,2	0,3	0,3	0,3
2	0,2	0,6	0,6	0,3
3	0,2	1	0,6	0,3
4	0	0	0	0

$\mu_{A\to B}(x, y) = \min(\mu_A(x); \mu_B(y))$

$\mu_{RI}(x, y)$

Zu 2) $RI \wedge A' =: RT$ mit $\mu_{RT}(x,y) = \min(\mu_{RI}(x,y); \mu'_A(x))$

$x\backslash y$	1	2	3	4
1	0,2	0,3	0,3	0,3
2	0,2	0,5	0,5	0,3
3	0,2	0,4	0,4	0,3
4	0	0	0	0

$\curvearrowright \mu'_B(y) = \max\limits_x \mu_{RT}(x,y) = \{(1;0,2);(2;0,5);(3;0,5);(4;0,3)\}$

1.5.4 Spezielle Implikationsoperatoren

Zadeh-Implikation „IF-THEN“

Motivation(klassisch) $a \to b \Leftrightarrow \neg a \vee b$

$\Leftrightarrow (\neg a \vee b) \wedge (\neg a \vee a)$

$\Leftrightarrow \neg a \vee (b \wedge a)$

$\curvearrowright \mu_{A \to B}(x,y) = \max(\min(a,b); 1-a)$

IF-THEN-ELSE: „wenn a, dann b, sonst c“

$(a \to b) \wedge (\neg a \to c)$

$\mu_*(x,y) = \max(\min(a;b); \min(1-a;c))$

Insbesondere $c = \neg b$

$(a \to b) \wedge (\neg a \to \neg b) \Leftrightarrow (a \to b) \wedge (b \to a)$

$\Leftrightarrow a \leftrightarrow b$

$\curvearrowright \mu_{A \leftrightarrow B}(x,y) = \max(\min(a;b); \min(1-a;1-b))$

Beispiel Körpergröße $\leftrightarrow$ Schuhgröße $A :=$ LANG, $B :=$ GROSS

Körpergr. $x(cm)$	165	170	175	180	185	190	195
$\mu_A(x)$	0	0,1	0,3	0,7	0,8	0,9	1
$1-\mu_A(x)$	1	0,9	0,7	0,3	0,2	0,1	0
Schuhgr.	40	41	42	43	44	45	46
$\mu_B(y)$	0	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9	1
$1-\mu_B(y)$	1	0,9	0,7	0,5	0,3	0,1	0

LANG $\leftrightarrow$ GROSS

$x\backslash y$	40	41	42	43	44	45	46
165	1	0,9	0,7	0,5	0,3	0,1	0
170	0,9	0,9	0,7	0,5	0,3	0,1	0,1
175	...	...	...	...	...	...	...
180	...	...	...	...	...	...	...
185	...	...	...	...	...	...	...
190	0,1	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9	0,9
195	0	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9	1

Gödel -Implikation Motivation(klassisch)

a	b	$a \to b$	Vergleich	Ergebnis
1	1	1	$\delta(a) \le \delta(b)$	1
1	0	0	$\delta(a) > \delta(b)$	$\delta(b)$
0	1	1	$\delta(a) \le \delta(b)$	1
0	0	1	$\delta(a) \le \delta(b)$	1

Satz

1. $B \subset B'$
2. $A' = A \xrightarrow{\text{Gödel}} B' = B$ (klass. Modus ponens)
3. Für 3. - Gödel-Implikation größtmögliche Relation

Zu 1. $\mu'_B(y) = \max(\min(\mu'_A(x); \mu_{A \xrightarrow{\text{Gödel}} B}(x,y))) \ge \min(\underbrace{\mu'_A(x_0)}_{1}; \mu_{A \xrightarrow{\text{Gödel}} B}(x,y)) \ge \mu_B(y)$

A' normalisiert: $\exists x_0 : \mu'_A(x_0) = 1$

Zu 2. Fallunterscheidung

1. $\mu_A(x) \le \mu_B(y)$:
$$\min(\mu'_A(x); \underbrace{\mu_{A \xrightarrow{\text{Gödel}} B}(x,y))}_{1} = \mu'_A = \mu_A(x)$$
2. $\mu_A(x) > \mu_B(y) \quad \le \mu_B(y)$ (laut Norm)
$$\min(\underbrace{\mu'_A(x)}_{\mu_A(x)}; \underbrace{\mu_{A \xrightarrow{\text{Gödel}} B}(x,y))}_{\mu_B(y)} \le \mu_B(y)$$
$\Rightarrow \mu'_B(y) = \max \min(\mu'_A(x); \mu_{A \xrightarrow{\text{Gödel}} B}(x,y))$ d.h. $B' \subset B + 1. \Rightarrow 2.$
3. RI-Implikations-Relation
Geg.: $\mu'_B(y) = \max\limits_x \min(\mu_A(x); \mu_{RI}(x,y)) \le \mu_B(y)$
Maximaler Wert von $\mu_{RI}(x,y)$:
    a) $\mu_A(x) \le \mu_B(y) \Rightarrow \max(\mu_{RI}(x,y)) = 1$
    b) $\mu_A(x) > \mu_B(y) \Rightarrow \max(\mu_{RI}(x,y)) = \mu_B(y)$
    $\curvearrowright$ Maximallösung RI $\triangleq$ Gödel

2 Stochastische Modelle

2.1 Zuverlässigkeitstheorie

2.1.1 Systemzuverlässigkeit

Elemente $E_1, \ldots, E_k$: Ausfallwahrscheinlichkeit, $p_1, \ldots, p_k$

1. Serienschaltung

   p_s - Systemzuverlässigkeit Ereignisse: S Systemintakt A_i Element E_i intakt

   $p(A_i) = 1 - P(\bar{A}_i) = 1 - p_i$ $p_s = P(S) = P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k) = P(A_1) \cdot \cdots \cdot P(A_k) = (1 - p_1) \cdot \cdots \cdot (1 - p_k)(1)$

2. Parallelschaltung

   Beispiel

   - Zweimotorige Flugzeuge: Motoren
   - Siebenköpfiger Drache: Köpfe

   $p_p = P(S) = 1 - P(\bar{S}) = 1 - P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \cdots \cap \bar{A}_k) = 1 - P(\bar{A}_1) \cdot \cdots \cdot P(\bar{A}_k) = 1 - p_1 \cdot p_2 \cdot \cdots \cdot p_k(2)$

3. Zusammengesetzte Systeme [hier E 1,2,3 parallel (S_1), dazu 4 und 5 seriell dazu (S_2)]

   Systemzuverlässigkeit $p_{sy} = (1 - p_1 p_2 p_3) \cdot (1 - p_4) \cdot (1 - p_5)$

   Beispiel

   a) $p_1 = p_2 = p_3 = 0,1$
   $p_4 = p_5 = 0,001 \curvearrowright p_{sy} = 0,9970$
   Zum Vergleich : $S_1 \triangleq E_1 : p_{sy} = 0,9 \cdot (0,999)^2 = 0,8932$

   Interpretation der Ergebnisse Zeit: pro Stunde; $p = p_{sy}$ ges: (Durchschnittliche) Funktionsdauer $T_S : E(T_S) = \sum_{n=1}^{\infty} np^n = \sum_{n=1}^{\infty} np^{n-1}p = p \sum_{n=1}^{\infty} (p^n)' = p(\sum_{n=1}^{\infty} p^n)' = p(\frac{p}{1-p})' = p\frac{(1-p)+p}{(1-p)^2} = \frac{p}{(1-p)^2}$

   Beispiel

   a) $E(T_S) = 110.777,78h \triangleq 4615d \triangleq 12,6a$
   b) $E(T_S) = 78,3h \triangleq\approx 3d$

2.1.2 Erneuerungsprozess

$T_1 = t_1 - 0, T_2 = t_2 - t_1$ Betriebszeiten
Verteilungsfunktionen für $T_i : F(t) = P(T_i \leq t)(t \geq 0)$
$(0; t]$: Anzahl von Erneuerungen N_t
Offenbar $P(N_t < n) = P(t_n > t), n = 0, 1, 2, \ t > 0$

Spezialfälle

1. $T_i \sim N(\mu;\sigma^2); \mu > 3\sigma$
   $P(N_t = 0) = P(N_t < 1) = P(t_1 > t) = P(T_1 > t) = 1 - P(T_1 \leq t) = 1 - \Phi(\frac{t-\mu}{\sigma})$
   $P(N_t < 2) = P(t_2 > t) = P(T_1 + T_2 > t) = 1 - P(T_1 + T_2 \leq t) = 1 - \Phi(\frac{t-2\mu}{\sqrt{2}\sigma}$
   Analog: $P(N_t < n) = 1 - \Phi(\frac{t-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}), n = 1, 2, \ldots$

   Beispiel $\mu = 10, \sigma = 3, t = 35$
   $P(N_t < 1) = 1 - \Phi(\frac{35-10}{3}) = 0,000$
   $P(N_t < 2) = 0,000$
   $P(N_t < 3) = 1 - \Phi(\frac{35-30}{\sqrt{3}3}) = 0,168$
   $P(N_t < 4) = 0,798$
   $P(N_t < 5) = 0,987$
   $P(N_t < 6) = 1,000$
   $\curvearrowright P(N_t = 0) = 0,000; P(N_t = 1) = 0,000; P(N_t = 2) = 0,168$
   $P(N_t = 3) = 0,630; P(N_t = 4) = 0,189; P(N_t = 5) = 0,013$
   Mittlere Anzahl von Erneuerungen: $E(N_t) = \sum\limits_{k=0}^{5} kP(N_t = k) = 3,047$

Expotentialverteilung

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0$$

$\Rightarrow N_t$ Poisson-Verteilt mit Parameter λt:

$$E(N_t) = \lambda t$$

Erneuerungsfunktion $H(t) = E(N_t)$:
Allgemein: $\lambda t - 1 \leq H(t) \leq \lambda t + \lambda^2\sigma^2$ mit $E(T_i) = \frac{1}{\lambda}, \sigma^2 = \mathrm{Var}(T_i)$ Insbesondere IFR-Verteilungen (s. unten)

$$H(t) \leq \lambda t$$

Beispiel: $\mu = E(T_i) = 10, \sigma^2 = \mathrm{Var}(T_i) = 9, t = 35$
ges: $H(t)$ für

1. Exp-Verteilung
2. allg.
3. IFR-Verteilung

Zu 1): $H(t) = \lambda t = 3,5 \curvearrowright \lambda = \frac{1}{E(T_i)} = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{10}$
Zu 2): $2,5 \leq H(t) \leq 2,59$
Zu 3): $H(t) \leq 3,5$

2.1.3 Die Ausfallrate

- X-„Lebensdauer" eines Bauteils mit Verteilungsfunktion

$$P(X \leq t) = F(t)$$

Ausfallwahrscheinlichkeit.

Dichtefunktion $f(t) = F'(t)$ offenbar $F(0) = 0$ bzw. $F(t) = 0, \forall t \leq 0$

Mittlere Lebensdauer $T_0 = E(X) = \int\limits_0^\infty t f(t)\, dt$

- Bedingte Wahrscheinlichkeit, dass Bauteil im Intervall $(t; t + \Delta t]$ ausfällt, wenn es bis t funktioniert hat?

$P(\underbrace{X \leq t + \Delta t}_{B} \mid \underbrace{X > t}_{A}) = \dfrac{P(\overbrace{X \leq t + \Delta t}^{B} \cap \overbrace{X > t}^{A})}{\underbrace{P(X > t)}_{A}} = \frac{P(t<X\leq t+\Delta t)}{1-P(X\leq t)} = \frac{F(t+\Delta t)-F(t)}{1-F(t)}$

$r(t) := \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{P(X\leq t+\Delta t|X>t)}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{F(t+\Delta t)-F(t)}{\Delta t} \frac{1}{1-F(t)} \curvearrowright r(t) = \frac{f(t)}{r-F(t)}$ D.h. $F(t) \to r(t)$

Umgekehrt $r(t) \to F(t)$:

$\left.\begin{array}{rcl} \bar{F}(t) & = & 1 - F(t) \\ \bar{F}'(t) & = & -F'(t) = -f(t) \end{array}\right\} \Rightarrow r(t) = \frac{-\bar{F}'(t)}{\bar{F}(t)} | \cdot F$

$\bar{F}'(t) + r(t)\bar{F}(t) = 0$

lineare homogene DGL. 1. Ordnung

$$\bar{F}(t) = Ce^{-\int\limits_0^t r(t)\, dt}$$

$\bar{F}(0) = 1 - F(0) = 1 \curvearrowright \bar{F}(0) = C = 1 \Rightarrow \bar{F}(t) = e^{-\int\limits_0^t r(t)\, dt} \curvearrowright F(t)$

Typische Modelle

1. $r(t) = \alpha\beta t^{\beta-1}$ $(t \geq 0), \alpha, \beta \geq 0$ WEIBALL-Verteilung
   offenbar für $\beta > 1$: $r(t)$ streng monoton wachsend
   $\beta = 1$: $r(t) = \alpha = const$
   $\beta < 1$: $r(t)$ streng monoton fallend

   Verteilungsfunktion $F(t) = 1 - \bar{F}(t) = 1 - e^{-\int\limits_0^t r(t)\, dt} = 1 - e^{-\int\limits_0^t \alpha\beta t^{\beta-1}\, dt} = 1 - e^{\frac{-\alpha\beta t^\beta}{\beta}|_0^t} = 1 - e^{-\alpha t^\beta}$

   $\beta = 1$ Exponentialverteilung (ohne Gedächtnis) $(r(t) = \alpha)$
   $\beta = 2 \quad r(t) = 2\alpha t$ RAYLEIGH-Verteilung

2. HJARTH-Verteilung

$$r(t) = \alpha t + \frac{\gamma}{1 + \beta t} \quad \alpha, \beta, \gamma \geq 0$$

Spezialfälle

1. $\alpha = \beta = 0$ $r(t) = \gamma$ Exponential-Verteilung
2. $\gamma = 0, r(t) = \alpha t$ Rayleigh-Verteilung

3 Phasen Badewannenkurve

1. Frühfehler: $r(t)$ hoch, nimmt ab
2. Zufallsfehler $r(t) \approx$ const
3. Altererscheinung $r(t)$ wächst

2.2 Warteschlagentheorie

2.2.1 Grundbegriffe

Mittlere Pausenzeit m_A bzw. $\lambda = \frac{1}{m_A}$-Intensität des Forderungsstroms
Mittlere Bedienungszeit m_B bzw. $\mu = \frac{1}{m_B}$-Bedieungsintensität

2.2.2 Das Warteschlangensystem $M|M|1$

$1 \triangleq 1$ Bediener
unbegrenzte Bedienzeiten: M („Markowsch"); Unabhängigkeit!
Pausenzeiten - Exponentialverteilt mit Parameter λ
Bedienzeiten - Exponentialverteilt mit Paramter μ
Sei $N_t(t \geq 0)$- Anzahl der Forderungen im System zu Zeitpunkt t
$P(N_t = i) =: P_i(t), i = 0, 1, 2, \ldots$
Es gilt $P_0(t + \Delta t) = (1 - \lambda\Delta t)P_0(t) + \mu\Delta t P_1(t) + o(\Delta t)$ mit $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0$

Nachweis Formel der totalen Wahrscheinlichkeit

$$P(A) = \sum_i P(A|B_i)P(B_i)$$

mit A-System zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ leer $\triangleq P_0(t + \Delta t)$
B_0-System zum Zeitpunkt t leer $\triangleq P_0(t)$
B_1-System zum Zeitpunkt $t = 1$ leer $\triangleq P_1(t)$
Es gilt : $P(A|B_0) = P(\text{„zu } (t; t + \Delta t] \text{ keine Forderung"}) = P(\text{Restpausenzeit} > \Delta t) = 1 - P(\text{Restpausenzeit} \leq \Delta t)$
$= 1 - (1 - e^{-\lambda\Delta t}) = e^{-\lambda\Delta t} =$ (Taylor-Reihe)
$= 1 - \lambda\Delta t + o(\Delta t)$
Analog $P(A|B_1) = \mu\Delta t + o(\Delta t)$
D.h. $*) \Rightarrow P_0(t+\Delta t) = [1-\lambda\Delta t+o(\Delta t)]P_0(t)+[\mu\Delta t+o(\Delta t)]P_1(t) = (1-\lambda\Delta t)P_0(t)+\mu\Delta t P_1(t)+o(\Delta t)$
$1 \to 1$ | Pausen und Bedienzeit laufen nicht ab | $[1 - \lambda\Delta t - o(\Delta t)] \cdot [1 - \mu\Delta t - o(\Delta t)] = 1 - \lambda\Delta t - \mu\Delta t + o(\Delta t)$
$1 \leftrightarrow i \curvearrowright P_i(t + \Delta t) = \lambda\Delta t P_{i-1}(t) + (1 - \lambda\Delta t - \mu\Delta t)P_i(t) + \mu\Delta t P_{i+1}(t) + o(\Delta t), \quad i = 1, 2, \ldots$

Differenzengleichungen mit $P_o(t+\Delta t) - P_o(t) = -\lambda \Delta t P_o(t) + \mu \Delta t P_1(t) + o(\Delta t) | : \Delta t \to 0$
$P_o'(t) = -\lambda P_o(t) + \mu P_1(t) \quad (1)$
$P_i'(t) = \lambda P_{i-1}(t) - (\lambda+\mu) P_i(t) + \mu P_{i+1}(t) \quad (2)$
unendliches Dgl-System. Lösung Schwierig! Speziallfall: Stationärer Fall: $P_i(t) = P_i \quad \forall t$
$\curvearrowright P_i'(t) = 0, i = 0, 1, 2, \dots$
Gleichungssystem: $0 = -\lambda P_0 + \mu P_1 \quad (1')$
$i = 1 \quad 0 = \lambda P_0 - (\lambda+\mu) P_1 + \mu P_2 \quad (2a')$
$0 = \lambda P_{i-1} - (\lambda+\mu) P_i + \mu P_{i+1} \quad (2b')\ i = 2, 3, \dots$
$(1') \Rightarrow P_1 = \frac{\lambda}{\mu} P_0$
In $(2a')$: $0 = \mu P_1 - (\lambda+\mu) P_1 + \mu P_2$
$\lambda P_0 = \mu P_1 \curvearrowright P_2 = \frac{\lambda}{\mu} P_1$
$\lambda P_1 = \mu P_2$ in $(2b')$: $\quad 0 = \mu P_2 - (\lambda+\mu) P_2 + \mu P_3 \curvearrowright P_3 \frac{\lambda}{\mu} P_2$

$$\Rightarrow P_i = \frac{\lambda}{\mu} P_{i-1} \quad i = 1, 2, \dots$$

Setzen $\varrho = \frac{\lambda}{\mu}$: $P_i = \varrho P_{i-1}, i = 1, 2, \dots \Rightarrow P_i = \varrho^i P_0, i = 1, 2, \dots \quad (3)$
wegen $\sum\limits_{i=0}^{\infty} P_i = 1 : \sum\limits_{i=0}^{\infty} P_i = \sum\limits_{i=0}^{\infty} \varrho^i P_0 = P_0 \frac{1}{1-\varrho}, |\varrho| < 1 = 1$
$\curvearrowright P_0 = 1 - \varrho, \varrho < 1 \quad (4)$
Anmerkungen: Für $\varrho = \frac{\lambda}{\mu} \geq 1$ ergibt keine vernünftige Lösung, d.h. $\lambda \geq \mu$ (Intensität des Forderungsstrom größer gleich der Bedienintensität)
Mittlere Anzahl warteneder Forderungen
$m_L = \sum\limits_{i=1}^{\infty} (i-1) P_i = \sum\limits_{i=1}^{\infty} (i-1) \varrho^i \cdot (1-\varrho) = 1 - \varrho \frac{\varrho^2}{(1-\varrho)^2} = \frac{\varrho^2}{1-\varrho}$
Mittlere Wartezeit m_w einer Forderung::
$m_L = \lambda m_w$ (Formel von Little) $m_w = \frac{\varrho^2}{1-\varrho)\lambda} = \frac{\varrho^2}{(1-\varrho)\varrho\mu} = \frac{\varrho}{(1-\varrho)\mu} \quad (6)$

2.2.3 Weitere Modelle

2.3 Empirische Statistikmodelle

2.3.1 Statistische Schätzung von Verteilungsfunktion u. Dichtefunktion

1. Verteilungsfunktion $F(t) = P(X \leq t)$

2. Dichtefunktion

2.3.2 Simulation von Zufallsvorgängen

$F(x)$ bekannt
Simulation

1. Erzeugung (uniformer) Zufallszahlen $u \in [0; 1]$

2. Ermittlung des zu u gehörigen Wertes $F(x)$

Zu 1) Peseudo-Zufallszahlen zu 2)

1. Diskrete Zufallsgrößen

   Beispiel: $u =, 6$ Würfeln X-Augenzahl
   $p_i = P(X = x_i) = P(X_i) = \frac{1}{6}; i = 1, 2, \dots, 6$
   $p_1 + p_2 + p_3 = \frac{3}{6} < u < p_1 + p_2 + p_4 + p_4 = \frac{4}{6}$
   $\curvearrowright X = 4$

2. Stetige Zufallsgröße

$$F(x) = u \Rightarrow x = F^{-1}(u) \text{ (Inversionsmethode)}$$

   Beispiel: Exponentialverteilung:
   $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, x \geq 0$
   $1 - e^{-\lambda x} = u$
   $1 - u = e^{-\lambda x} | ln$
   $-\lambda x = \ln(1 - u) \curvearrowright x = -\frac{1}{\lambda} \ln \underbrace{(1 - u)}_{\in(0;1]}$
   $\Rightarrow x = -\frac{1}{\lambda} \ln u$

   Normalverteilung 12er-Regel $Z = \sum_{i=1}^{12} u_i - 6 \triangleq N(0, 1)$-verteilte Zufallsgröße x beliebig normalverteilt, d.h. $N(\mu, \varrho^2) : x = z\varrho + \mu \sim \frac{x-\mu}{\varrho} : N(0, 1)$-verteilt

2.3.3 Die Monte-Carlo-Methode

Beispiel: Störungsfreie Funktion einer Anlage Strom und Blattplan
Expnentialverteilung

$$H_0 : \lambda = \frac{1}{7} \quad H_1 : \lambda \neq \frac{1}{7}, \quad \alpha = 0,05$$

Monte-Carlo-Test

1. Weitere 999 Werte für $\bar{x}$ (aus Stichprobe mit 32 Werten):
   $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{32} x_i = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{32} \frac{\ln u_i}{\lambda} = -\frac{1}{n\lambda} \sum_{i=1}^{32} \ln u_i = -\frac{1}{32\lambda} \ln \prod_{i=1}^{32} u_i$
2. ordnen nach Größen $\bar{x_1} \leq \bar{x_2} \leq \dots \leq \overline{x_{999}} \leq \overline{x_{100}}$
3. Falls $\bar{x_0} \leq \overline{x_{25}}$ oder $\bar{x} \geq x_{976}$, dann Ablehnung von H_0 Speziell: 480 Werte. $\bar{x_0} \geq \overline{x_{25}} = N_>, \bar{x_0} \leq \overline{x_{455}} = N_< \curvearrowright H_0$ bleibt

2.3.4 Konfidenzintervalle bei nichtnormalverteilter Grundgesamtheit

1. Zentraler Grenzwertsatz:

$$\frac{\overline{X} - E(X)}{S} \sqrt{n} \to N(0, 1) \text{ für } n \to \infty$$

Für große n: $P(-z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\overline{X}-E(X)}{S}\sqrt{n} \leq z_{\frac{\alpha}{2}}) = 1-\alpha - z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\overline{X}-E(X)}{S}\sqrt{n} \leq z_{\frac{\alpha}{2}} | \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} | - \overline{X}$
$\underbrace{-z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}}}_{d} - \overline{X} \leq -E(X) \leq z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}} - \overline{X} | \cdot (-1)$
$\overline{X} - d \geq E(X) \geq \overline{X} - d$
$\Rightarrow \overline{X} - d \leq E(X) \leq \overline{X} + d$
$\Rightarrow d = z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}}$

Beispiel (siehe oben) $\bar{x} = 5,04; s = 4,67, n = 32, \alpha = 0,05 \quad z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96 : \mu = E(X) \in (3,42; 6,66) \not\ni 7$

Anmerkung: n identisch exponentialverteile Größen deren Summe: Gamma-Verteilung mit $\alpha = n$: Konfidenzintervall $[\frac{2n\overline{X}}{\chi^2_{2n;\frac{\alpha}{2}}}; \frac{2n\overline{X}}{\chi^2_{2n;1-\frac{\alpha}{2}}}]\, \chi^2_{64;\frac{\alpha}{2}} = 88; \chi^2_{64;1-\frac{\alpha}{2}} = 43,8 \Rightarrow$

2. MonteCarlo-Methode
   - Verteilung bekannt: analog $\mu \in [\overline{X}_{25}; \overline{X}_{976}], \alpha = 0,05$
   - Boostrap-Konfidenzinterval
     z.B. $\alpha = 0,05, u_b = 1000; n = 32$
     $\mu \in (3,57; 6,78) \not\ni 7$
     Normalverteilung < Boostrap < Exponentialverteilung

2.3.5 Parameterfreie Test

unabhängig von einer Verteilung, „Schnelltests" Stichprobe 1: Zufallsgröße X
Stichprobe 2: Zufallsgröße Y

$$p_1 = P(X > Y), p_2 = P(X < Y)$$

1. Vorzeichentest
   $H_0 : p_1 = p_2 (= \frac{1}{2}) H_1 : p_1 \neq p_2$
   $T : x_i > y_i$ - Anzahl der Paare
   $T \in K$ - Krit. Bereich $\begin{array}{ll} \text{ja} & H_0 \text{ ablehnen } \rightarrow H_1 \text{ gilt} \\ \text{nein} & H_0 \text{ bleibt} \end{array}$

   Beispiel: Schwierige Messungen mit Apparaten 1 und 2, gelungen $\triangleq$ 1; misslungen $\triangleq$ 0

   $H_0 : p_1 \leq p_2$ $H_1 : p_1 > p_2$ (Fall c);$\alpha = 0,05$
   $T = 4; m = n = 7$
   Krit. Bereich K:

   a) $k = 2$ (Gleichheit)

   b) $c' \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$

   $c' : F(c') \leq \alpha, F(c'+1) > \alpha$: Tab. 1
   $n = 7 : F(0)0,008; F(1) = 0,063 > \alpha \curvearrowright c' = 0$
   Ablehnung von $H_0 : T \in \{m-k-c'; m-k\} = \{5\}$ f.A. $\rightarrow$ keine Ablehnung von H_0

2. U-Test (nach Wilconxon, Mann, Whitney) Rangsummen

Beispiel $m = 6$ Beobachtungen vom Typ $A(\triangleq X)$
$n = 5$ Beobachtungen von Typ $B(\triangleq Y)$
Werte

Werte	63	68	70	71	91	92	95	96	97	99	104
Herkunft	A	A	A	A	B	B	B	B	A	B	A
Ränge	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Rangsume $A : R_1 = 30, B : R_2 = 36$

Testgröße $u_1 = mn + \frac{m(m+1)}{2} - R_1 = z_1$
$u_2 = mn + \frac{n(n+1)}{2} - R_2 = \frac{9}{30=mn}$
$U = \min(U_1; U_2) = 9$
Krit. Bereich (Variante $A : m < 8$ oder $n < 8$):
Fall a) $H_0 : p_1 = p_2 \quad H_1 : p_1 \neq p_2$
$U \leq U(m; n; \alpha; \text{zweiseitig}) = 3$ f.A. $\curvearrowright$ keine Ablehnung

2.4 Statistik für mehrere Zufallsgrößen

2.4.1 Partielle Korrelationskoeffizienten

> 2 Zufallsgrößen $x, y, z, \ldots$
$|r \times y| \approx 1 \rightarrow x, y$ abhängig usw.

Beispiel Y : Geburtenanzahl in D (seit 1950)
X : Störche in D, Scheinkorrelation
3. Größe: Z: „Zivilisation“ (Anzahl der Autos o.ä.), $Z \uparrow \rightarrow X \downarrow, Y \downarrow$
Part. Korrelationskoeff. $r_{1,2;p}$ usw.

Beispiel Körpermaße von Studenten
$|r_{i,j;p}| \geq 0,8 \sim$ Abhängigkeit

2.4.2 Clusteranalyse

Schema: Objekte $\xrightarrow{\text{Messung}}$ Mesdaten $\vec{X}$ $\xrightarrow{\text{Zusammenfsg., Messdatenextraktion}}$ Merkmale $\vec{m} \rightarrow$ Cluster

Beispiel X_1 Alter (Jahre)
X_2 Betriebszugehörigkeit(Jahre)
X_3 Arbeitsdauer im Ausland (Monate)
X_4 Patente

Personen\Merkmal	x_1	x_2	x_3	x_4
A	25	1	6	1
B	30	6	3	2
C	35	2	48	5
D	45	15	13	0
E	55	11	0	2

ges: „Cluster“

Lösung:

1. Z-Transformation

$$z_{ij} = \frac{X_{ij} - \bar{X}_{oj}}{s_j}$$

j-Merkmals-Nr., i-Objekt-Nr.
$\bar{X}_{o1} = \bar{X}_1 = 38, \bar{X}_{o2} = \bar{X} - 2_n = 7, \bar{X}_{03} = \bar{X}_3 = 14$
$\bar{X}_{o4} = \bar{X}_4 = 2; s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_j)^2$
$s_1^2 = 145 \rightarrow s_1 = 12,04; s_2 = 5,90; s_3 = 19,61; s_4 = 1,87$
$z_{11} = \frac{x_{11} - \bar{x}_{o1}}{s_1} = \frac{25-38}{12,04} = -1,08$

Pers.\Merk.	X_1	X_2	X_3	X_4
A	$-1,08$	$-1,01$	$-0,41$	$-0,53$
B	$-0,66$	$-0,17$	$-0,56$	0
C	$-0,25$	$-0,84$	1,73	1,60
D	0,58	1,34	$-0,05$	$-1,07$
E	1,41	0,67	$-0,71$	0

$\hat{=} M(z_{ij})$

2. Abstände zw. Objekten O_i, O_k

$$d_{ik} = \sqrt{(z_{i1} - z_{k1})^2 + \cdots + (z_{im} - z_{km})^2}$$

$m \ldots$ Spaltenanzahl
z.B. $d_{12} = \sqrt{(-1,08 + 0,66)^2 + (-1,01 + 0,17)^2 + \cdots + (-0,53 + 0)^2}$

$$(d_{ik}) = \begin{pmatrix} 0 & 1,09 & 3,14 & 2,95 & 3,06 \\ 1,09 & 0 & 2,90 & 2,29 & 2,24 \\ 3,14 & 2,90 & 0 & 3,97 & 3,68 \\ 2,95 & 2,29 & 3,97 & 0 & 1,65 \\ 3,06 & 2,24 & 3,68 & 1,65 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Cluster-Bildung (Average-Linkage-Verfahren)

   a) 1)2) $\rightarrow$ 1; 09

$$(1)d_{ik} = \begin{array}{l} \begin{pmatrix} 0 & 3,62 & 2,62 & 2,65 \\ 3,62 & 0 & 3,97 & 3,68 \\ 2,62 & 3,97 & 0 & 1,65 \\ 2,65 & 3,68 & 1,65 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{„neu 1“(alt 1 + 2)} \\ \text{alt 3} \\ \text{alt 4} \\ \text{alt 5} \end{array}$$

b) 4)5) (alt)

$$(2)d_{ik} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & 3,02 & 2,64 \\ 3,02 & 0 & 3,82 \\ 2,64 & 3,82 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1+2 \\ 3 \\ 4+5 \end{array} \end{array}$$

c) 1)2) + 4)5)

$$(3)d_{ik} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & 3,42 \\ 3,42 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1,2+4,5 \\ 3 \end{array} \end{array}$$

d) Dendrogramm
Interpretation (2) AB,DE,C; junge, alte, kreative (3) ABDE,C; „Normale“

2.5 Prognose- und Entscheidungsprobleme

2.5.1 Anzahl von Fehlern

Beispiel Korrekturlesen einer Arbeit
Gesamtfehler (Anzahl): E
Fehler, die 1. Korrekturleser entdeckt: A
Fehler, die 2. Korrekturleser entdeckt: B
Fehler die 1. und 2. Korrekturleser entdeckt: C
Noch nicht gefundene Fehler ΔF

$$\Delta F = E - A - B + C$$

Wahrscheinlichkeit, dass 1. Fehler fand: $p = \frac{A}{E}, A = pE$
Wahrscheinlichkeit, dass 2. Fehler fand: $q = \frac{B}{E}, B = qE$
$r = \frac{C}{E} = P(„1“ \cap „2“) \underbrace{=}_{\text{Unabh.}} P(„1“) \cdot P(„2“) = pq$
Andererseits $AB = (pE)(qE) = pqE^2; CE = pqE^2$
$\rightarrow AB = CE \curvearrowright E = \frac{AB}{C}$
Folglich $\Delta F = \frac{AB}{C} - A - B + C = \frac{AB-AC-BC+C^2}{C} = \frac{A(B-C)+C(B-C)}{C} = \frac{(A-C)(B-C)}{C}$

2.5.2 Statistische Zukunftsabschätzungen

„Kopernikanisches Prinzip“: Prinzip der Mittelmäßigkeit
~ Gleichverteilung

$$t_1 = t_{\text{verg.}} + t_{\text{zukunft}}$$

$\tau = \frac{t_{ver}}{t_{ver}+t_{zuk}} \in (0; 1)$ Zufallszahl
$P(\frac{\alpha}{2} \le \tau \le 1 - \frac{\alpha}{2}) = 1 - \alpha \quad \tau$-Irrtumswahrscheinlichkeit
$\frac{\alpha}{2} \le \tau \le 1 - \frac{\alpha}{2}$
$\frac{2}{\alpha} \ge \underbrace{\frac{t_{ver} + t_{zuk}}{t_{ver}}}_{1+\frac{t_{zuk}}{t_{ver}}} \ge \frac{2}{2-\alpha} | - 1$
$\underbrace{\frac{2}{\alpha} - 1}_{\frac{2-\alpha}{\alpha}} \ge \frac{t_{zuk}}{t_{ver}} \ge \underbrace{\frac{2}{2-\alpha} - 1}_{\frac{2-(2-\alpha)}{2-\alpha} = \frac{\alpha}{2-\alpha}}$

$\frac{\alpha}{2-\alpha} \leq \frac{t_{zuk}}{t_{ver}} \leq \frac{2-\alpha}{\alpha}$
$\alpha = 0,5 : \frac{1}{3} \leq \frac{t_{zuk}}{t_{ver}} \leq 3 \curvearrowright \frac{1}{3}t_{ver} \leq t_{zuk} \leq 3t_{ver}$
$\alpha = 0,05 : \frac{1}{39} \leq \frac{t_{zuk}}{t_{ver}} \leq 39 \curvearrowright \frac{1}{39}t_{ver} \leq t_{zuk} \leq 39t_{ver}$

Beispiel J.R. Gott 1969 Berlin

1. Mauer $\alpha = 0,5 : [\frac{8}{3}; 24J]$
2. Hitler 1934 „Tausendjähriges Reich"
3. Broadway „1993": „Cats" 10J
4. Diskrete Ereignisse: Scheiffsreisen, u.ä.

Prognose: Dauer der Menscheit

2.5.3 Sekretärinnenproblem

Aufgabe: Besten von n Bewerbern finden bei sofortigen Entscheidungen
Optimale Strategie

1. r von n Kandidaten ansehen ($r < n$) und ablehnen
2. Ersten der verbleibenden $n - r$ Kandidaten wählen, der besser ist als der Beste der r Vorgänger

Ges: r so, dass Wahrsch. Besten zu finden $\rightarrow$ Max
Lösung: B-„Bester gefunden"
A_k-„Bester ist an der Stelle k"
$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_k)P(B|A_k)$ mit $P(A_k)$
mit $P(A_k) = \frac{1}{n}, k = 1, \ldots, n$
$P(B|A_k) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad k \leq r \\ \frac{r}{k-1} & \text{für} \quad k > r^{*)} \end{cases}$
$\curvearrowright P(B) = \sum_{k=r+1}^{n} \frac{1}{n}\frac{r}{k-1} = \frac{r}{n}\sum_{k=r}^{n-1}\frac{1}{k} \approx \frac{r}{n}\int_{r}^{n}\frac{1}{x}\,dx = \frac{r}{n}\ln x|_r^n = \frac{r}{n}\ln\frac{n}{r} = \frac{r}{n}\ln(\frac{r}{n})^{-1} = \frac{r}{n}\ln\frac{r}{n} \rightarrow \text{Max!}$
$f(x) = \frac{1}{x}, x \in [r; n]$
$\frac{r}{n} =: t : g(t) = -t\ln t \rightarrow \text{Max}$
$g'(t) = -\ln t - \frac{t}{t} = 0$
$-\ln -1 = 0$
$-1 = \ln t$
$t = e^{-1}$
D.h. $\frac{r}{n} = \frac{1}{e} \curvearrowright r = \frac{n}{e}$ (37 % Regel) r zweitbester

Modifizierte Aufgabe r so, dass nur möglichst guter Kandidat gewählt wird ~ Simulation
$n = 100$ vorgegeben
B_j Platz des Ausgewählten „Gute“

$$B_j \min_{1\leq r\leq n} \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} B_j(r) = M$$

2.5.4 Sammelbildproblem

Aufgabe: Serie mit n verschiedenen Motiven: Vollständig!
Annahme: Gleichverteilung! x_i - nach $(i-1)$ verschiedene Karten: neue i-te
$p_1 = P(X_1 = 1) = 1$
$p_2 = P(X_2 = 1) = \frac{n-1}{n}$
$p_i = P(X_i = 1) = \frac{n-(i-1)}{n} \quad i = 1, 2, \dots n$
$P(X_i = k) = (1 - p_i)^{k-1} p_i$ geometr. Verteilung
dabei $E(X_i) = \frac{1}{p_i} = \frac{n}{n-(i-1)}$
$var(X_i) = \frac{1}{p_i^2} - \frac{1}{p_i}$
Gesamtversuche $X = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$
$\curvearrowright \mu = E(x) = E(\sum\limits_{i=1}^{n} X_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} E(x_i) = \frac{n}{n} + \frac{n}{n-1} + \frac{n}{n-2} + \dots + \frac{n}{2} + \frac{n}{1}$
$= n(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \dots + \frac{1}{2} + \frac{1}{1}) = n \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}}_{H_n} \approx n(\ln(n) + 0,577)$
$\sigma^2 = var(x) : \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i^2} = (\frac{n}{n})^2 + (\frac{n}{n-1})^2 + \dots + (\frac{n}{1})^2 = n^2 \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} \approx n^2[\frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{n+1}]$
$\curvearrowright \sigma^2 \approx n^2[\frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{n+1}] - n[\ln n + 0,577]$
Logistisches Wachstum Andere Herleitung: In (1): $\lambda = \gamma - \tau$
γ Geburtenrate, τ Todesrate
In (1): $\frac{dP}{dt} = (\gamma - \tau)P = \gamma P - \tau P - \tau P^2 \Rightarrow \frac{dP}{dt} = \gamma P - \tau P^2 (4')$ mit $\gamma = \lambda K, \tau = \lambda \Rightarrow K = \frac{\gamma}{\tau}$

Untersuchung von (4):

- Ende des Wachstums: $\frac{dP}{dt} = 0 \to K = P$
- $P(t)$ wächst streng, falls $P_0 < K$
- $P(t)$ sinkt stetig, falls $P_0 > k$
- Änderungsrate $\dot{P} = \frac{dP}{dt} \to \ddot{P} = \lambda \dot{P}(K - P) - \lambda P \dot{P} = \lambda \dot{P}(K - 2P) > 0$
  Für $P_0 < \frac{K}{2} : \ddot{P} > 0 : \dot{P} \uparrow$
  $P_0 > \frac{K}{2} : \ddot{P} < 0 : \dot{P} \downarrow$

2.5.5 Gleichgewichtsprobleme

Räuber-Beute-Modell B- Beutepopulation R- Räuberpopulation
Analog $B = \alpha_2 B - \beta_2 RB \quad (\alpha_k, \beta_k > 0)$
Anfangsbed. $R(0) = R_0, B(0) = B_0(1b)$
Dgl.-System; nicht linear

Wettbewerbsmodell 2 Populationen P_1, P_2; beschränkte völlig verschiedene Ressourcen $R_1, R_2 \Rightarrow \dot{P}_k = \alpha_k P_k - \beta_k p_k^2 \quad K = 1, 2$ (logistische Gleichung)
Falls Wettbewerb um Ressourcen: $R_1 = R_2$
$\rightarrow \dot{P}_1 = \alpha_1 P_1 - \beta_1 P_1^2 - \gamma_1 P_1 P_2$
$\dot{P}_2 = \alpha_2 P_2 - \beta_2 P_2^2 - \gamma_2 P_1 P_2$
mit $P_1(0) = P_{10}, P_2(0) = P_{20}$

Qualitative Theorie $R \triangleq x, B \triangleq y$:
$\dot{X} = -\alpha_1 x + \beta_1 xy$ (3a)
$\dot{Y} = \alpha_2 y - \beta_2 xy$
mit $X(0) = x_0, Y(0) = y_0$(3b)
Lösung in Parameterdarstellung möglich: $x = x(t), y = y(t), t \geq 0$

1. Gibt es eine stationäre Population? (Trajektorie)
   D.h. $x(T)0\xi, y(t) = \eta$
   $\curvearrowright \dot{x}(t) = \dot{y}(t) = 0$
   In (3a): $-\alpha_1 \xi + \beta_1 \xi \eta = 0 \Leftrightarrow \xi(-\alpha_1 + \beta_1 \eta) = 0$
   $\alpha_2 \eta - \beta_2 \xi \eta = 0 \Leftrightarrow \eta(\alpha_2 - \beta_2 \xi) = 0$
   $\curvearrowright \xi_1 = \eta_1 = 0$ entfällt
   $\Rightarrow \eta_2 = \frac{\alpha_1}{\beta_1}; \xi_2 = \frac{\alpha_2}{\beta_2} \curvearrowright$ Gleichgewichtspunkt (ξ_2, η_2)

2. Allgemein: Falls $\dot{x}(t_0) = \dot{y}(t_0) = 0 \rightarrow$ Stationärer Fall!
   Folglich $\dot{x}^2(t_0) + \dot{y}^2(t_0) > 0$
   Annahme: $\dot{x}(t_0) \neq 0$ (anderer Fall: analog!)
   - $\dot{x}(t) \neq 0$ in Umgebung von t_0
   - $y(t)$ kann als Funktion von $x(t)$ aufgefasst werden

   $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\alpha_2 y - \beta_2 xy}{-\alpha_1 x + \beta_1 xy} = \frac{\alpha_2 - \beta_2 x}{x} \frac{y}{-\alpha_1 + \beta_1 y}$
   Trennung der Variablen $| \cdot dx| \cdot \frac{-\alpha_1 + \beta_1 y}{y}$
   $\frac{-\alpha_1 + \beta_1 y}{y} dy = \frac{\alpha_2 - \beta_2 x}{x} dx$
   $\int \frac{-\alpha_1 + \beta_1 y}{y} dy = \int \frac{\alpha_2 - \beta_2 x}{x} dx$
   $-\alpha_1 \ln y + \beta_1 y = \alpha_2 \ln x - \beta_2 x + c$(4)

3. Schlußfolgerungen, Bsp:
   $\alpha_1 = 0,008; \alpha_2 = 1,0$
   $\beta_1 = 0,000001, \beta_2 = 0,002$

$x(0) = 500; y(0) = 700$
Trajektorie lässt sich numerisch generieren!

Interpretation der Trajektorie:

a) minimale Raubpopulation R: $B \uparrow \Rightarrow R \uparrow$
b) R übermächtig $B \downarrow$
c) Schwindende Nahrungsvorräte für R : $R \downarrow$
d) Schonzeit für B : $B \uparrow$

4. Umlaufzeit Durschnittliche Größe von $x(R)$ und $y(B)$: $\bar{x} := \frac{1}{T}\int\limits_0^T x(t)\,dt, \bar{y} := \frac{1}{T}\int\limits_0^T y(t)\,dt$

Betrachten $\int\limits_0^T (\alpha_2 - \beta 2x)\,dt = \int\limits_0^T \frac{\dot{y}}{y}\,dt = \ln y|_0^T \underbrace{=}_{y(T)=y(0)} 0$
$\dot{y} = \alpha_2 y - \beta_2 xy$
$\Rightarrow \int\limits_0^T \alpha_2\,dt = \beta_2 \int\limits_0^T x\,dt$
$\alpha_2 T = \beta_2 \int\limits_0^T x(t)\,dt \curvearrowright \int\limits_0^T x(t)\,dt = \frac{\alpha_2 T}{\beta_2}$
$\Rightarrow \bar{x} = \frac{\alpha_2}{\beta_2}$ Analog: $\bar{y} = \frac{\alpha_1}{\beta_1}$
Fazit: Um $(\frac{\alpha_2}{\beta_2}, \frac{\alpha_1}{\beta_1})$ kreist Trajektorie

2.5.6 Partielle Differentialgleichungen

Beispiel $z = z(x,y) z_x = h(y) | \int \ldots dx$
$z = \int h(y)\,dx = h(y)x + g(y)$
Fazit: Lösungen sind abhängig von beliebigen Faktoren

2.5.7 Wichtige partielle Dgl

Grundlage: Erhaltungssätze
Gebiet Quantität von u in G
Änderung von u = Fluss durch den Randvon G + Entstehen bzw. Versiegen im Inneren

$\mathbb{R}^3$: $\frac{\partial u}{\partial t} + div\Phi = f(t,x,y,z)$ mit $\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ Phi_3 \end{pmatrix}$ Fluss der Quantität, $f = (t,x,y,z)$ Quellen/Senken in G

Transport oder Korrektion $\Phi = \Phi(u) = \begin{cases} (\Phi_1(u), \Phi_2(u), \Phi_3(u))^T \text{ nicht linear} \\ z(x,y,z)^T u \text{ - linear} \end{cases}$

mit $z(x,y,z) = \begin{cases} z = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \text{ homogene Mat.} \\ \neq z \text{ inhomog. Mat.} \end{cases}$