Skriptum Mathematik 1 und 2

Markus Klemm.net

WS 2013/2014, SS 2014

Inhaltsverzeichnis

1 Elementare Grundlagen

1.1 Aussagen und Grundzüge der Logik

1.1.1 Aussagen, Wahrscheinlichkeitswert

Aussagen sind zweitwertig. bool Aussage.

Bezeichnungen: p,q

$$\text{Wahrheitswert } (p) = \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad \text{wahr} \\ 0 & \text{falls} \quad \text{falsch} \end{cases}$$

Beispiel: „42 ist die Antwort auf alle Fragen" „Diese Aussage ist falsch." Nicht zweiwertig, ergo keine Aussage.

$$p \underbrace{\equiv}_{\text{Identisch}\to\text{gleicher Wahrheitswert}} q$$

1.1.2 Aussagenlogik/-verbindungen

1. Negation $\overline{p}$ $\quad (p', \neg p)$
2. Konjunktion $p \wedge q$ (Und)
3. Disjunktion $p \vee q$ (Oder)
4. Implikation $\underbrace{p}_{\text{Prämisse}} \to \underbrace{q}_{\text{Konklusion}} := (\overline{p} \vee q)$
5. Äquivalenz $p \leftrightarrow q := (p \to q) \wedge (q \to p)$

1.1.3 Logische Gesetze Tautologien

Eine Tautologie t ist eine Aussagenverbindung die unabhängig vom Wahrheitswert der einzelnen Aussagen stets wahr ist $t \equiv 1$

Beispiele

1. $p \leftrightarrow \overline{\overline{p}}$
2. $p \wedge \overline{p}$
3. a) $\overline{p \wedge q} \leftrightarrow \overline{p} \vee \overline{q}$ (1. Regel von de Morgan)
   b) $\overline{p \vee q} \leftrightarrow \overline{p} \wedge \overline{q}$ (2. Regel von de Morgan)
4. $(p \to q) \leftrightarrow (\overline{q} \to \overline{p})$
5. $(p \wedge (p \to q)) \to q$ (direkter Beweis)
6. $(p \wedge (\overline{q} \to \overline{p})) \to q$ (indirekter Beweis)

Bemerkung: Eine Äquivalenz ist genau dann eine Tautologie, wenn beide Seiten identisch sind, z.B. $p \equiv \overline{\overline{p}}$

Beweistechniken Zu beweisen: q

1. Direkter Beweis: Vorraussetzung p, $\quad p \to q$
2. Indirekter Beweis: Annahme $\overline{q}$ auf Widerspruch führen

$$(\overline{q} \to q) \to q$$
$$(\overline{q} \to 0) \to q$$

Weitere Gesetze

- $p \wedge q \equiv q \wedge p, \quad p \vee q \equiv q \vee p$ (Kommutativ)
- $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r) \ldots$ (Assoziativ)
- $(p \wedge q) \vee r \equiv (p \vee r) \wedge (q \vee r) \ldots$ (Distributiv)
- $p \vee (p \wedge q) \equiv p$ (Absorptionsgesetz)

1.1.4 Aussagenfunktionen, Quantoren, Prädikatenlogik

χ sei eine Menge (Gesamtheit von Objekten x mit einem gemeinsamen Merkmal, vgl. Abschnitt 1.2.)

$x \in \chi \ldots$x ist Element von χ. Die Objekte haben Eigenschaften (Prädikate). Aussagenfunktion (auch Aussagenform) $p(x)$: Jedem $x \in \chi$ ist eine Aussage $p(x)$ zugeordnet. Dabei steht x für ein Element, p für ein Prädikat.

Beispiel 5: $\chi \ldots$Menge der positiven natürlichen Zahlen; 1,2,3, $\ldots p(x) :=$ „x ist eine Primzahl“ z.B. p(5) wahr, p(10) falsch

Quantoren Betrachtet werden folgende Aussagen

1. Für alle x (aus χ) gilt p(x): Bezeichung $\forall_x p(x)$ (universeller Quantor, Allquantor)
2. Es existiert (mindestens) ein x, für welches p(x) gilt: Bezeichnung $\exists_x p(x)$ (existenzieller Quantor)

Zur Schreibweise Bei Anwendungen (außerhalb der reinen Logik) wird oft die Grundmenge χ mit angegeben: $\forall_{x \in \chi} p(x)$ usw. Falls sich Quantoren auf eine Teilmenge M von χ bezeichnen sollen, können dann folgende Schreibweisen verwendet werden: $a = \forall_{x \in M} \quad p(x), b = \exists_{e \in M} \quad p(x)$ Die Schreibweisen in der folgenden Logik sind dann: $a = \forall_x (x \in M \Rightarrow p(x)), b = \exists_x (x \in M \wedge p(x))$

Rechenregeln

$$\overline{\forall_x p(x)} \equiv \exists_x \overline{p(x)}$$
$$\overline{\exists_x p(x)} \equiv \forall_x \overline{p(x)}$$

Mehrstellige Aussagenfunktionen

- $p(x1, x2, ..., x_n), x_1 \in \chi_1, ..., x_n \in \chi_n$ (Grundmengen χ_i können gleich sein, müssen es aber nicht)
- Wird ein Quantor auf eine n-stellige Aussagenfunktion angewandt, so entsteht eine (n-1)-stelle Aussagenfunktion. (Dabei 0-stellige Aussagenfunktion $\rightarrow$ Aussage) z.B: $\exists_y p(x, y, z)$, die Varaiable y wird durch den Quantor $\exists$ gebunden $\rightarrow$ gebundene Variable, x und z sind freie Variablen $\exists_y p(x, y, z) = q(x, z)$ Beispiel 6: Ein Dorf

bestehe aus 2 Teilen (Ober- und Unterdorf). Es sei M die Menge aller Bewohner des Dorfes. M_1 bzw. M_2 sei die Teilmengenv von M, die dem Oberdorf bzw. Unterdorf entsprechen. Wir betrachten folgende zweistellige Aussagenfunktion $k(x, y)$ ... Person x (aus M) kennt Person y (aus M)

1.2 Mengen

1.2.1 Begriffe

Menge Zusammenfassung gewisse Objekte (Elemente) mit einem gemeinsamen Mermal zu einem Ganzen

Diskusion Naiver Mengenbegriff, führt zu Widersprüchen. Diese können umgangen werden, wenn nur Teilmengen einer sogenannten Grundmenge betrachtet werden.

Bezeichnung meist mit großen Buchstaben A,B,...,M $x \in M$ ... x ist Element von M
$x \notin M$ ... x ist kein Element von M

Schreibweise $M = \{\dots\}$ oder $M = \{x|p(x)\}$

Wichtige Grundmengen:

$\mathbb{N}$ ... Menge der natürlichen Zahlen {0,1,2,3,...}
$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, ...\} = \mathbb{N}\backslash\{0\}$

Beispiel 1:

1. M_1 ... Menge der Primzahlen kleiner als 10,
   $M_1 = \{2, 3, 5, 7\}$

2. $M_2 = \{x \in \mathbb{R}|0 < x < 1\} =: (0; 1)$ ... Intervallschreibweise

Definition 1 Es seien a und b reelle Zahlen mit $a < b$.
$[a; b] := \{x \in \mathbb{R}|a \leq x \leq b\}$ ... abgeschlossenes Intervall
$(a; b) := \{x \in \mathbb{R}|a < x < b\}$ ... offenes Intervall
$[a; b) := \{x \in \mathbb{R}|a \leq x < b\}$
$(-\infty; a] := \{x \in \mathbb{R}| -\infty < x \leq a\} = \{x \in \mathbb{R}|x \leq a\}$ usw.

Leere Menge z.B. $\{x \in \mathbb{R}|x = x + 1\}$ enthält kein Element, Bezeichnung $\varnothing$ (oder { })

1.2.2 Mengenverknüpfungen

Definition 2 $M_1 = M_2 \quad := \forall X(x \in M_1 \leftrightarrow x \in M_2)$ (Gleichheit)

Definition 3 $M_1 \subseteq M_2 \quad := \forall X(x \in M_1 \rightarrow x \in M_2)$ (Inklusion)
„M_1 ist Teilmenge von M_2“

Diskussion Ist $M_1 \subseteq M_2$, aber $M_1 \neq M_2$ So kann man schreiben $M_1 \subset M_2$ (Echte Teilmenge)

Definition 4

1. $A \cap B := \{x | x \in A \wedge x \in B\}$
   Durchschnitt von A und B

2. $A \cup B := \{x | x \in A \vee x \in B\}$
   Vereinigung von A und B

3. $A \backslash B := \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$
   Differenz „A minus B“

4. Beim Vorliegen einer Grundmenge E:
   $\overline{A} := E \backslash A$
   Komplementärmenge von A

Diskussion

1. $\cup$ und $\cap$ sind kommutativ und assoziativ, z.B. gilt $A \cup B = B \cup A, (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) =: A \cap B \cap C$

2. Allg. I ... Indexmenge, z.B. $\{1, 2, ..., n\}, \mathbb{N}, \mathbb{Z}$,
   dann $\bigcap\limits_{i \in I} A_i := \{x | \exists_{i \in I} X \in A_i\}$
   $\bigcup\limits_{i \in I} A_i := \{x | \forall_{i \in I} x \in A_i\}$

1.2.3 Relationen

Grundbegriffe

Definition 5 Die Menge $M_1 \times M_2 := \{(x_1, x_2) | x_1 \in M_1 \wedge x_2 \in M_2\}$
heißt kartesisches Produkt der Mengen M_1 und M_2. (= Menge ungeordneter Paare)

Beispiel 2 $\mathbb{R}$ ... Menge der reellen Zahlen veranschaulicht durch die Zahlengerade
$\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) | x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}$ ... x-y-Ebene

Definition 6 Eine Teilmenge $T \subseteq M_1 \times M_2$ heißt binäre Relation.

Diskussion

1. Verallgemeinerung
   $M_1 \times M_2 \times ... \times M_n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) | x_1 \in M_1, x_2 \in M_2, ..., x_n \in M_n\}$
   =Menge der geordneter n-Tupel), eine Teilmenge $T \subseteq M_1 \times M_2 \times ... \times M_n$ heißt n-stellige Relation

2. Jede Teilmenge von $M_1 \times M_2$ ist eine Relation, also auch die beiden Grenzfälle $\varnothing$ und $M_1 \times M_2$. Wichtig sind aber im Allgemeinem die echten Teilmengen, die die verschiedensten Beziehungen zwischen den Elementen von M_1 und M_2 ausdrücken.

Definition 7 Eigenschaften binärer Relationen in $M_1 \times M_2$
Eine Relation $T \subseteq M_1 \times M_2$ heißt:

1. linksvollständig (linkstotal), wenn für jedes $x_1 \in M_1$ wenigstens ein $x_2 \in M_2$ existiert mit $(x_1, x_2) \in T$
2. rechtsvollständig (rechtstotal), wenn für jedes $x_2 \in M_2$ wenigstens ein $x_1 \in M_1$ existiert mit $(x_1, x_2) \in T$
3. rechtseindeutig, wenn für jedes $x_1 \in M_1$ höchstens ein $x_2 \in M_2$ existiert mit $(x_1, x_2) \in T$
4. linkseindeutig, wenn für jedes $x_2 \in M_2$, höchstens ein $x_1 \in M_1$ existiert mit $(x_1, x_2) \in T$

Definition 8 Eigenschaften binärer Relationen in $M \times M$
Eine Relation $T \subseteq M \times M$ (Sprechweise auch Relation auf M) heißt

1. reflexsiv, wenn $(x, x) \in T$
2. symetrisch, wenn $(x, y) \in T \rightarrow (y, x) \in T$
3. antisymetrisch, wenn $((x, y) \in T \wedge (y, x) \in T) \rightarrow x = y$
4. asymetrisch, wenn $(x, y) \in T \rightarrow (y, x) \notin T$
5. transitiv, wenn $((x, y) \in T \wedge (y, z) \in T) \rightarrow (x, z) \in T$

jeweils $\forall x, y, z \in M$ gilt.

Zwei Personen $x \in P$ und $y \in P$ heißen gleichaltrig, wenn x und y das gleiche Geburtsjahr besitzen. Relation $G \subseteq P \times P$ mit $G = \{(x, y)|$ x und y sind gleichaltrig$\}$
G ist offensichtlich reflexiv, symmetrisch und transitiv. Derartige Relationen nennt man Äquivalenzrelationen. (vlg. 1.2.3.3). Sie teilen P in disjunkte sog. Äquivalenzklassen auf. (x äquivalent y, heißt x und y besitzen gleiches Geburtsjahr).

Grafische Darstellung von Relationen T in $M \times M$ (auf M)

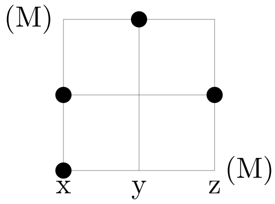
1.Möglichkeit: Elemente von M nur einmal darstellen, Pfeildarstellung wie bisher, bei $(x, x) \in T$ eine Schlinge zuordnen. $x_{\circlearrowleft} \rightarrow y \rightleftarrows z$

Reflexivität Bei jedem Element eine Schlinge ($\circlearrowleft$)

Symmetrie Jeder Pfeil $x \rightleftarrows y (x \neq y)$ besitzt Umkehrpfeil (Antisymmetrie: Schlingen sind möglich, aber keine Umkehrpfeile, Asymmetrie: Weder Schlingen noch Umkehrpfeile)

Transitivität Falls Pfeil $x \to y$ eine Fortsetzung $y \to z$ besitzt, dann verläuft auch ein Pfeil von x nach z.

2.Möglichkeit: Mit Koordinatensystem



Reflexivität Die Diagonale $I_M = \{(x,x)|x \in M\}$ gehört zu T (I_M heißt auch Identitätsrelation, diese Relation ist eine spezielle Funktion)

Symmetrie T ist spiegelsymmetrisch zu I_M

Alternative Schreibweisen Es sei $T \subseteq M_1 \times M_2$ eine binäre Relation. An Stelle $(x,y) \in T$ kann man auch schreiben:

1. $x\ T\ y$ (x steht in Relation T zu y), für viele Relationen gibt es spezielle Zeichen z.B. $x < y$, $g||h$.
2. Aussagenfunktion (vlg. Prädikatenlogik) $T(x,y)$ (auch mehrstellig möglich)

Operationen auf Relationen Da Relationen spezielle Mengen sind, gibt es die Operation $\cap\cup$ usw. auch hier. Weitere für Relationen typische Operationen vgl. Definition 9-11.

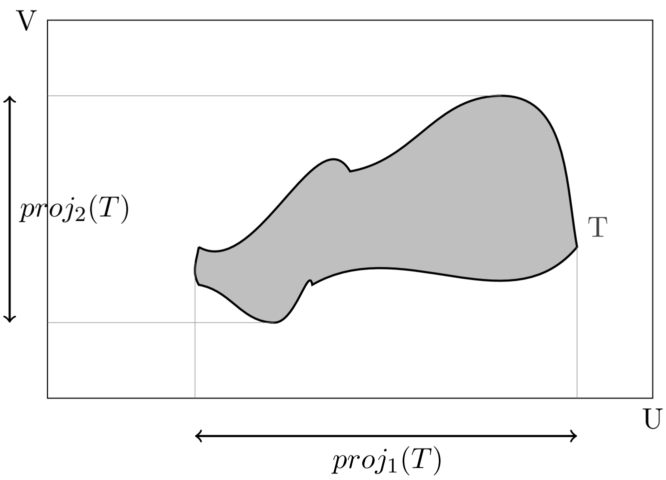
Definition 9 Es sei T eine Relation in $U \times V$
Die Menge

$$proj_1(T) = \{x \in U|\exists y \in V \quad (x,y) \in T\}$$

heißt Projektion von T auf U. (1. Faktor des Produkts)
Analog ist

$$proj_2(T) = \{y \in V|\exists x \in U \quad (x,y) \in T\}$$

die Projektion von T auf den 2. Faktor (V) des Produkts $U \times V$.



Definition 10 Es sei $T \subseteq M_1 \times M_2$ eine binäre Relation
Die Relation

$$T^{-1} := \{(y,x)|(x,y) \in T\} \subseteq M_2 \times M_1$$

heißt inverse Relation zu T (kurz Inverse).

Definition 11 Es seien $T_1 \subseteq M_1 \times M_2$ und $T_2 \subseteq M_2 \times M_3$ binäre Relationen. Als Komposition (oder Verkettung) $T_1 \circ T_2$ wird folgende Relation

$$T_1 \circ T_2 := \{(x,z) \in M_1 \times M_3 | \exists y \in M_2 \quad ((x,y) \in T_1 \wedge (y,z) \in T_2)\}$$

in $M_1 \times M_3$ bezeichnet.

Diskussion Wichtige Eigenschaft der Komposition $\circ$: Die Operation $\circ$ ist assoziativ, d.h. sei $T_1 \subseteq A \times B, T_2 \subseteq B \times C$ und $T_3 \subseteq C \times D$, dann gilt $(T_1 \circ T_2) \circ T_3 = T_1 \circ (T_2 \circ T_3) =: T_1 \circ T_2 \circ T_3 \subseteq A \times D$

Definition 12 Es sei T eine Relation in $M \times M$ (auf M). Als transitive Hülle T^+ von T bezeichnet man die kleinste Relation die T enthält und transitiv ist.

Satz 1 Es gilt

$$T^+ = T \cup (T \circ T) \cup (T \circ T \circ T) \cup ...$$

Bemerkung Bezeichnung für $\underbrace{T \circ T \circ ... \circ T}_{n-mal}$ auch T^n.

Achtung nicht zu verwechseln mit dem Mengenprodukt $T \times T \times ... \times T$ bzw. bei Funktion mit der n-ten Potenz f^n Damit ist

$$T^+ = \bigcup_{g=1}^{\infty} T^j$$

Beweis:

1. T^+ ist transitiv, dann sei $(x, y) \in T^+ \wedge (y, z) \in T^+$, dann existiert natürliche Zahlen $j_1, j_2 \geq 1$ mit $(x, y) \in T^{j_1}$ und $(y, z) \in T^{j_2}$, d.h. y wird in j_1 Schritten von x aus erreicht und z in j_2 Schritten von y aus. Also wird z in $j_1 + j_2$ Schritten von x aus erreicht, d.h.: $(x, z) \in T_{j_1+j_2} \Rightarrow (x, z) \in T^+$.

2. Es sei $T \subseteq S$ für eine transitive Relation $S \Rightarrow T \circ T \subseteq S \circ S \subseteq S$ und für beliebiges $j \geq z \quad T^j \subseteq S^j \subseteq S$ und damit $T^+ = \bigcup\limits_{g=1}^{\infty} T^j \subseteq S$, d.h. T^+ ist tatsächlich die kleinste transitive Relation, die T enthält.

Diskussion

1. Analog zur transitiven Hülle einer RElation T in $M \times M$ (auf M) werden die reflexive bzw. die symmetrische Hülle als die jeweils kleinsten Relationen, die T enthalten und die entsprechende Eigenschaft besitzen, erklärt. Die Ermittlung gestattet sich etwas einfacher als bei der transitiven Hülle.

   Reflexive Hülle von T:
   $$T \cup I_M$$
   dabei $I_M = \{(x, x) | x \in M\}$ ... Identitätsrelation.

   Symmetrische Hülle von T: $T \cup T^{-1}$

2. Von Bedeutung ist auch die reflexiv-transitive Hülle von $T: \quad T^* := T^+ \cup I_M$ (dabei T^* transitive Hülle)

Beispiel 8 Gegeben sei die Menge $M = \{a, b, c, d, e, f\}$ sowie die Relation $T = \{(a, b,), (b, c), (c, e), (b, d), (d, e), (e, f)\}$

1. Transitive Hülle

   Zur Ermittlung der Elemente eines Komposition $S \circ T$: Für jedes Element $(x, y) \in S$ alle Fortsetzungen $(y, z_i) \in T$ suchen $\curvearrowright (x, z_i)$ als Element von $S \circ T$ notieren, falls noch nicht vorhanden.

   Also $T \circ T : (a, b)$ Fortsetzung $(b, c), (b, d) \curvearrowright (a, c), (a, d)$
   (b, c) Fortsetzung $(c, e) \curvearrowright (b, c)$
   $\curvearrowright T \circ T = T^2 = \{(b, c,), (b, d), (c, e), (c, f) \curvearrowright T^3 = T \circ T^2 = \{(a, e), (b, f)\}$
   $\curvearrowright T^4 = T \circ T^3 = \{(a, f)\} \curvearrowright T^5 = T \circ T^4 = \varnothing \curvearrowright T^+ = T \cup T^2 \cup T^3 \cup T^4$

2. Reflexive Hülle: $T \cup \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e), (f, f)\}$

3. Symmetrische Hülle: $T \cup T^{-1} = T \cup \{(b, a), (c, b), ...\}$

Zur Überprüfung der Eigenschaften aus Definition 8 ist folgender Satz nützlich:

Satz 2 Es sei $T \subseteq M \times M$ eine binäre Relation. Dann gilt:

1. T ist reflexiv $\Leftrightarrow I_M \subseteq T$ (I_M ... Identitätsrelation)
2. T ist symmetrisch $\Leftrightarrow T^{-1} \subseteq T (\Leftrightarrow T^{-1} = T)$
3. T ist antisymmetrisch $\Leftrightarrow T \cap T^{-1} \subseteq I_M$
4. T ist asymmetrisch $\Leftrightarrow T \cap T^{-1} = \varnothing$
5. T ist transitiv $\Leftrightarrow T \circ T \subseteq T$

Diskussion Aus c) und d) ergibt sich

T asymmetrisch $\Rightarrow$ T antisymmetrisch

(da $\varnothing$ Teilmenge jeder Menge ist, auch von I_M)

Äquivalenzrelationen

Definition 13 Eine Relation $T \subseteq M \times M$ heißt Äquivalenzrelation, wenn sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist:
Diskussion:

1. Durch eine Äquivalenzrelation wird M vollständig in paarweise elementfremde (disjunkte) Äquivalenzklassen zerlegt. Die Menge aller Äquivalenzklassen von M bezüglich T heißt Quotientenmenge M/T.

   Aufgrund der 3 Eigenschaften aus Definition 13 enthält eine Äquivalenzklasse alle Elemente die untereinander erreichbar sind und nur diese.

2. Äquivalenzklassen enthalten alle Elemente die bezüglich einer bestimmten Eigenschaft nicht unterscheidbar sind (= äquivalent), z.B. Beispiel 4b mit $M = P$ (Menge von Personen), Äquivalent $G \subseteq P \times P$ mit $\{(x, y)|$ x u. haben gleiches Geburtsjahr$\}$, Äquivalenzklassen sind die Jahrgänge.

3. Anstelle der Schreibweisen $(x, y,) \in T, \quad \times Ty$ oder $T(x, y)$ verwendet man bei beliebigen Äquivalenzklassen auch $x \sim y$. Bei vielen speziellen Äquivalenzrelationen spezielle Symbole, vlg. Beispiel 9.

Beispiel 9

a) M sei eine beliebige Menge $T_1 = I_M = \{(x, y) \in M \times M | x = y\}$ (Identitätsrelation) ist eine Äquivalenzrelation. Äquivalenz heißt hier gleich! Äquivalenzklassen sind sämtliche einelementige Teilmengen $\{x\}, x \in M$. T_1 liefert die feinste Zerlegung von M, die möglich ist. Die gröbste „Zerlegung“ liefert die Relation $T_2 = M \times M$, die trivialerweise eine Äquivalenzrelation ist (mit nur einer Äquivalenzklasse M). Für die Anwendungen wichtig: Relationen, die eine echte Zerlegung liefern.

b) $M = \mathbb{Z}$ (ganze Zahlen), $m \in \mathbb{N}^*, T \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ mit

   i. $(x, y) \in T :=$ „x und y lassen bei Division den gleichen Rest“

   ii. Bezeichnung $x \equiv y(\mod m)$ x kongruent y (modulo m) z.B. $29 \equiv 8(\mod 7)$

   iii. T ist eine Äquivlenzrelation auf $\mathbb{Z}$, Äquivalenzklassen: Restklassen (modulo M).

c) $M \ldots$ Menge aller Geraden einer Ebene, $T \subseteq M \times M$ mit $(x, y) \in T :=$ „x ist parallel zu y“. Bezeichnung $x \parallel y$, T ist Äquivalenzrelation auf M.

Ordnungsrelation

Definition 14

1. Eine Relation $T \subseteq M \times M$ heißt Ordnungsrelation auf M, wenn sie reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist.

2. Eine Ordnungsrelation heißt vollständig (oder linear), wenn für alle $x, y \in M$ gilt $(x, y) \in T \vee (y, x) \in T$

Definition 15 Eine Relation $T \subseteq M \times M$ heißt strikte Ordnungsrelation, wenn sie asymmetrisch und transitiv ist. Eine strikte Ordnung heißt vollständig (linear), wenn für alle $x, y \in M$ mit $x \neq y$ gilt: $(x, y) \in T \wedge (y, x) \in T$

Beispiel 10

1. $M = \mathbb{R}, T \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit $(x, y) \in T := x \leq y$ ist eine vollständige Ordnungsrelation auf $\mathbb{R}$

2. Die Relation „$<$“ ist eine vollständige, strikte Ordnung auf $\mathbb{R}$.

3. E sei die Menge, M sei die Menge aller Teilmengen von E, die sogenannte Potenzmenge $M = \mathcal{P}(E) \quad T \subseteq M \times M$ mit $(A, B) \in T := A \subseteq B$ ist eine Ordnungsrelation $\mathcal{P}(E)$ (Inklusion)

Diskussion:

1. In der Literatur wird manchmal eine Relation im Sinne der Definition 14 als Halbordnung und nur eine vollständige Ordnung als Ordnungsrelation bezeichnet.

2. Zu jeder Ordnung T_1 (auf M) gehört eine strikte Ordnung T_2 und umgekehrt.

$$T_2 = T_1 \backslash I_M \quad \text{bzw.} \quad T_1 = T_2 \cup I_M$$

   (T_1 ist die reflexive Hülle von T_2), z.B. $(\leq, <)$ oder $(\subseteq, \subset)$

3. Die Symbole $\leq$ bzw. $<$ können anstelle der Paarschreibweise auch bei beliebigen Ordnungen verwendet werden, falls keine anderen Symbole vorhanden.

Definition 16 T sei eine Ordnungsrelation auf einer Menge M. Weiter sei A eine Teilmenge von M.

1. Ein Element $a \in M$ heißt obere Schranken von A, wenn $\forall x \in A \quad x \leq a$, d.h. $(x, a) \in T$ vgl. Diskussion 3.

2. Es sei B die Menge aller oberen Schranken von A ($B \neq \varnothing$). Falls es eine kleinste obere Schranke s von A gibt, d.h. $\exists s \in B \forall b \in B \quad s \leq b$, so heißt s das Supremum von A, $s = \sup A$

3. Gilt $s \in A$, so heißt s das Maximum von A, $s = \max A = \sup A$

4. Ein Element $M \in A$ heißt maximal, wenn es kein größeres Element in A gibt, d.h. $\forall x \in A \quad (m \leq x \Rightarrow m = x)$

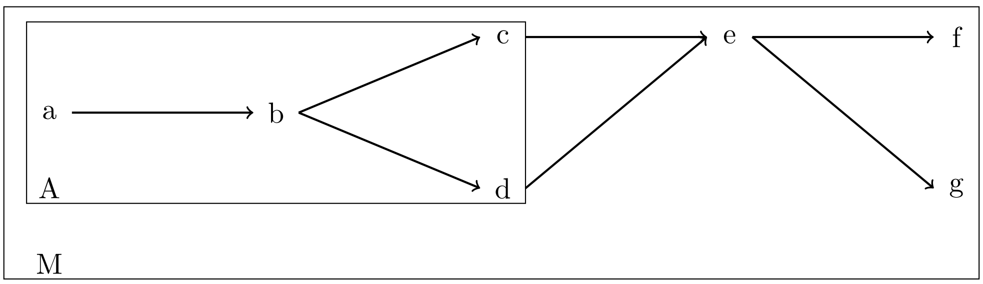
Diskussion:

1. Die Begriffe aus Definition 16, lassen sich auf strikte Ordnungen S übertragen, indem anstelle von S die reflexive Hülle $S \cup I_M$ verwendet wird.

2. Bei Ordnugnsrelationen T (auch strikten) auf endlichen Mengen M, kann ein vereinfachter Graph, das sogenannte Hasse -Diagramm betrachtet werden: $a \to b (a \neq b)$ bedeutet $(a, b) \in T$ und es gibt kein Zwischenglied $c \neq a$ und $c \neq b$ mit $(a, c) \in T \wedge (c, b) \in T$, ($b$ ist unmittelbar Nachfolger von a bzw. a ist unmittelbar Vorgänger von b)

   Diesem Diagramm entspricht eine Teilrelation $U \subseteq T$, deren transitiv-reflexive Hülle (bzw. transitive Hülle bei strikten Ordnungen) die Relation T ist.

3. Veranschaulichung von Definition 16 mit einem Hasse Diagramm einer nichtvollständigen Ordnung (nicht linear)

   obere Schranken von $A: e, f, g$ kleinste obere Schranke $= \sup A = e$ $\max A$ existiert nicht, da $e \notin A$

   maximale Elemente von $A: c, d$ (es gibt in A keine größeren)

4. Bei nicht linearen Ordnungen müssen obere Schranken, Supremum und Maximum nicht existieren, es kann mehrere maximale Elemente geben (von $A \subset M$) Bei linearen Ordnungen auf endlichen Mengen gibt genau ein maximales Element $= \max A = \sup A$

5. Analog zur Definition 16 werden die Begriffe untere Schranke a von A $(\forall x \in A \quad a \leq x)$, größte untere Schranke (=Infimum) s von A ($B \neq \varnothing \ldots$ Menge der unteren Schranken, $\exists s \in B \quad \forall a \in B \quad a \leq s$), Minimum von $A(\min A = \inf A = s \quad \text{falls} \quad s \in A)$ und minimales Element m von $A(\forall x \in A \quad (x \leq m \Rightarrow x = m)$ definiert.

Beispiel 11: Eine bestimme Arbeitsaufgabe besteht aus mehreren Arbeitsgängen. Es sei $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ die Menge der Arbeitsgänge. Die Arbeitsgänge $\{2,3,5\} =: S$ werden von einer Subfirma durchgeführt. Für die Reihenfolge gilt: 1 muss vor 2, 2 vor 3 und vor 5, 3 vor 4, sowie 5 vor 6 durchgeführt werden.

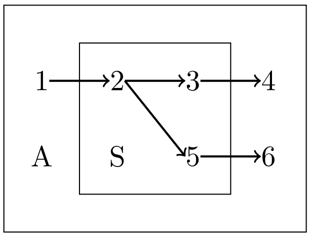
1. Man beschreibe diese Forderungen durch eine Relation $U \subseteq A \times A$ und stelle sie graphisch dar.

2. Man ermittle die transitive Hülle U^+ von U.

3. Man gebe (falls vorhanden) obere Schranken, Supremum, Maximum, maximimale Elemente, sowie untere Schranken, Infimum, Minimum und minimale Elemente von S an.

Lösung:

1. $U = \{(1,2),(2,3),(2,5),(3,4),(5,6)\}$



2. $U \circ U = \{(1,3),(1,5),(2,4),(2,6)\}$
$U^3 = U \circ U^2 = \{(1,4),(1,6)\}$
$U^4 = U \circ U^3 = \varnothing$
$\Longrightarrow \; U^+ = U \cup U^2 \cup U^3 = ...$

   U^+ ist asymmetrisch und transitiv, also strikte Ordnung (Skizze ... Hasse Diagramm

3.
   - S hat keine oberen Schranken, kein Supremum, kein Maximum; aber maximale Elemente: $3,5$
   - untere Schranken $1,2, \inf S = \min S = 2$ (=einziges minimales Element)

Funktionen

Definition 17: Eine Relation $f \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ heißt Funktion (Abbildung) von $\mathcal{X}$ in $\mathcal{Y}$, wenn sie linksvollständig und rechtseindeutig ist.

Diskussion:

1. Gemäß Definition 7 1 und 3 bedeutet linksvollständig und rechtseindeutig, dass zu jedem $x \in \mathcal{X}$ genau ein $y \in \mathcal{Y}$ mit $(x, y) \in f$ existiert, also eindeutige Zuordnung
$$x \to y =: f(x)$$
Schreibweise
$$f|\mathcal{X} \to \mathcal{Y}$$
$y = f(x)$ heißt auch Bild von x, x heißt ein Urbild von y (muss nicht eindeutig sein)

2. $\mathcal{X} =: Db(f) \ldots$ Definitionsbereich
$Wb(f) := \{y \in \mathcal{Y} | \exists x \in \mathcal{X} \quad (x, y) \in f\}$
$\subseteq \mathcal{Y} \ldots$ Wertebereich
Schreibweise auch $f(\mathcal{X}) := Wb(f)$

Definition 18

1. Eine Abbildung f heißt surjektiv (auch Abbildung auf $\mathcal{Y}$, wenn $Wb(f) = \mathcal{Y}$

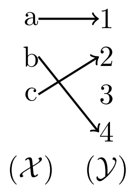
2. Eine Funktion f heißt injektiv (auch umkehrbar, eindeutig oder eineindeutig), wenn es zu jedem $y \in Wb(f)$ genau ein $x \in Db(f)$ existiert mit $(x, y) \in f$:
$$\underbrace{y}_{\in Wb(f)} \longrightarrow \underbrace{x}_{\in Db(f)} =: f^{-1}(y)$$
Die dadurch erklärte Abbildung $f^{-1}|Wb(f) \to Db(f)$ heißt Umkehrfunktion von f, vgl. auch Kapitel 1.4.

3. Eine injektive und surjektive Abbildung heißt bijektiv.

4. Gebräuchlich sind auch die Begriffe Surjektion, Injektion und Bijektion

Beispiel 12: Gegeben seien die Mengen $\mathcal{X} = \{a, b, c\}$ und $\mathcal{Y} = \{1, 2, 3, 4\}$, sowie folgende Relationen in $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$:

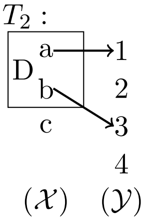
1. T_1 :



T_1 ist eine Funktion (da linksvollständig und rechtseindeutig), Funktion $f = T_1$: $f|\mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, diese ist injektiv, $Db(f) = \mathcal{X}, Wb(f) = \{1, 2, 4\} =: W$

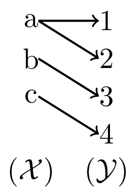
Die Abbildung $f|\mathcal{X} \to W$ ist auch surjektiv, also bijektiv. Als Relationen sind $f|\mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ und $f|\mathcal{X} \to W$ nicht zu unterscheiden, aber als Funktionen.

2. T_2 :



T_2 ist keine Funktion, da nicht linksvollständig. Betrachtetman $D := \{a, b\}$, so wird durch T_2 eine Funktion $f|D \to \mathcal{Y}$ beschrieben, diese ist injektiv und kann mit $W := f(D) = Wb(f) = \{1, 3\}$ zu einer bijektiven Abbildung $f|D \to W$ umgewandelt werden.

3. T_3 :



T_3 ist keine Funktion, da nicht rechtseindeutig.

Beispiel 13:

1. $f|[0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $x \to y = f(x) = \sqrt{x}$ ist eine Funktion einer reellen Veränderlichen (injektiv, $Db(f) = [0, \infty)$)

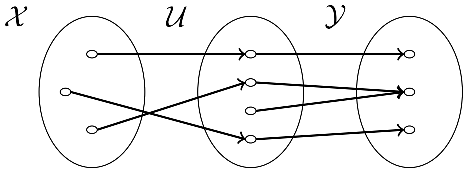
2. $f|\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $z = f(x, y) = x^2 + y^2$
$(x, y) \to f(x, y) = x^2 + y^2 =: z$ Funktion zweier reeller Veränderlichen

3. $f|\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mit $n \to f(n) = \frac{n}{n+1}$ ...reelle Zahlenfolge $f(0) = 0, f(1) = \frac{1}{2}, f(2) = \frac{2}{3}$, ... Bezeichnung meist mit Index $a_n := f(n) \curvearrowright$ Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Definition 19 Es seien $g|\mathcal{X} \to U$ mit $x \to u = g(x)$ und $f|U \to \mathcal{Y}$ mit $u \to y = f(u)$ zwei Abbildungen. Dann stellt die Zuordnung $x \to y = f(\underbrace{g(x)}_{u})$ eine Abbildung von $\mathcal{X}$ in $\mathcal{Y}$ dar, eine sogenannte mittelbare Funktion (Komposition/Verkettung).

Bezeichnung: $g \circ f|\mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ mit $y = (g \circ f)(x) = f(g(x))$

Diskussion:

1. 

$$x \to u = g(x) | u \to y = f(u) = f(g(x))$$
$$\text{Paarschreibweise}(x,u) \in g | (u,y) \in f \curvearrowright (x,y) \in g \circ f$$

2. g wird zuerst angewendet, dann f; wie bei beliebigen Relationen, also Schreibweise $g \circ f$

3. In der Literatur findet man leider oft die Schreibweise $f \circ g$, offenbar angelehnt an die Schreibweise $f(g(x))$. Die Reihenfolge ist aber von innen nach außen, erst g, dann f.

   Bei allen späteren Anwendungen von mittelbaren Funktionen (Vorlesungen,Literatur) die Schreibweise überprüfen. Im Zweifelsfall stets die immer eindeutige Schreibweise $f(g(x))$ ohne Verwendung von „$\circ$“ benutzen!

Satz 3 Es sei $f|\mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ eine Bijektion, d.h. es existiert die Umkehrfunktion $f^{-1}|\mathcal{Y} \to \mathcal{X}$. Weiter bezeichne für eine beliebige Menge A die Schreibweise i_A die identische Abbildung (Identitätsrelation, d.h. $i_A|A \to A$ und $i_A(x) = x \, (x \in A)$.

Es gilt dann:

$$f \circ f^{-1} = i_{\mathcal{X}}, \text{d.h.}(f \circ f^{-1})(x) = f^{-1}(f(x)) = x \quad (\forall x \in \mathcal{X})$$
$$f^{-1} \circ f = i_{\mathcal{Y}}, \text{d.h.}(f^{-1} \circ f)(y) = f(f^{-1}(y)) = y \quad (\forall y \in \mathcal{Y})$$

(Funktion und Umkehrfunktion nacheinander angewandt „heben sich auf“)

Beweis: ÜA 1.31

Satz 4 Es seien $g|\mathcal{X} \to U$ und $h|U \to \mathcal{Y}$ zwei Bijektionen. Dann ist die Komposition $f := g \circ h|\mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ ebenfalls eine Bijektion und es gilt:

$$f^{-1} = (g \circ h)^{-1} = h^{-1} \circ g^{-1}$$

Zum Beweis: $x \to u = g(x) \to y = h(u) = h(g(x)) = (g \circ h)(x)$
Umkehrung: $y \to u = h^{-1}(y) \to x = g^{-1}(u) = g^{-1}(h^{-1}(y)) = (h^{-1} \circ g^{-1})(y)$
Mehr zu Imkehrfunktionen reeller Funktionen im Kapitel 1.4..

1.2.4 Gleichmächtigkeit,Kardinalzahlen

E sei eine (hinreichend umfassende) Grundmenge, die alle für eine mathematische Theorie relevanten Objekte (Zahlen,Funktionen usw.) enthält.

M sei die Potenzmenge von E, d.h. $M = \mathcal{P}(E)$

Definition 20 Zwei Mengen A und B $(A \subseteq E, B \subseteq E \text{bzw.} A \in M, B \in M)$ heißen gleichmächtig. (Bezeichnung $(A \sim B)$, wenn eine bijektive Abbildung von A auf B (und damit auch von B auf A bzw. zwischen A und B) existiert.

Diskussion:

1. Offensichtlich ist die Relation $T \subseteq M \times M$ mit $(A, B) \in T := A \sim B$ eine Äquivalenzrelation auf M.

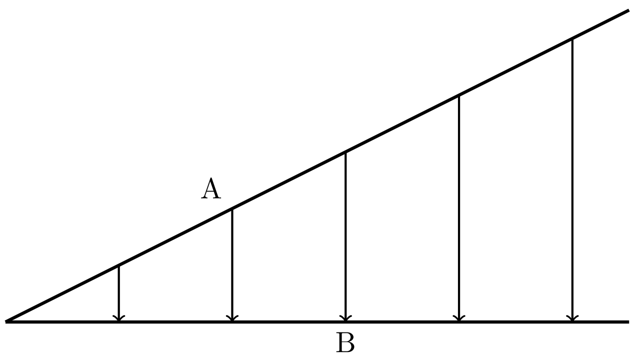
2. Äquivalenzklassen sind MEngen gleichmächtiger Teilmengen von E. Diese Äquivalenzklassen nennt man Kardinalzahlen.

3. Bei endlichen Mengen bedeutet Gleichmächtigkeit: gleiche Anzahl von Elementen.

   $$\begin{array}{llccc} \text{A} & =\{ & \text{a}, & \text{b}, & \text{c}\} \\ & & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \text{B} & =\{ & 1, & 2, & 3\} \end{array} \quad \text{(bijektive Abbildung)}$$

   Bezeichnung: $card\, A = |A| = 3 = |B|$ Natürliche Zahlen sind die Kardinalzahlen endlicher Mengen.

4. Die Anschauung versagt bei unendlichen Mengen.

   Die Strecken A und B sind gleichmächtig, obwohl A länger als B ist.

Definition 21 Eine Menge heißt abzählbar unendlich, wenn sie mit der Menge $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ der natürlichen Zahlen gleichmächtig ist.

Diskussion:

1. M ist abzählbar unendlich heißt, es existiert eine Zählvorschrift, bei der jedes Element von M nach endlichen vielen Schritten erreicht wird.

2. Die Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen ist abzählbar unendlich. Anordnung nach wachsenden Betrag: $\mathbb{Z} = \{0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, ...\}$

3. $\mathbb{Q}^+$ ... Menge der positiven rationalen Zahlen.
   $\mathbb{Q}^+ = \{\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \cancel{\frac{2}{2}}, \frac{3}{1}, ...\}$

   $\curvearrowright$ Analog zu $\mathbb{Z}$: Die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ ist abzählbar unendlich.

4. Es gibt Mengen, die mächtiger als die Menge der natürlichen Zahlen sind: Überabzählbare Mengen.

   B heißt mächtiger als A, wenn es eine injektive Abbildung $f|A \to B$ gibt, aber keine bijektive Abbildung, Schreibweise $|A| < |B|$,

Satz 5 Die Menge $M = \{x \in \mathbb{R}|0 < x < 1\} = (0;1)$ ist überabzählbar.

Beweis: (Cantorsches Diagonalverfahren): Indirekt, angenommen $M = (0;1)$ sei abzählbar unendlich, d.h. $M = \{x_1, x_2, x_3, ...\}$. Für die Zahlen x_h wählen wir z.B. die eindeutige Darstellung als Dezimalbruch (9er Periode verwenden)

$x_1 = 0, a_1^{(1)} a_2^{(1)} a_3^{(1)} ...$
$x_2 = 0, a_1^{(2)} a_2^{(2)} a_3^{(2)} ...$
$x_3 = 0, a_1^{(3)} a_2^{(3)} a_3^{(3)} ...$
...

Es sei $z = 0, b_1 b_2 b_3 ...$ mit $b_k = \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad a_k^{(k)} \neq 1 \\ 2 & \text{falls} \quad a_k^{(k)} = 1 \end{cases} \quad (k = 1, 2, 3, ...)$

Damit unterscheiden sich x_k und z auf jedem Fall an der h-ten Stelle $\curvearrowright z \neq x_k (\forall k)$, z ist also nicht in der Folge $x_1, x_2, x_3, ...$ enthalten, also $z \notin M$. Andererseits gilt $0 < z < 1$, also $z \in (0;1) = M$ Widerspruch. q.e.d.

Satz 6 Es sei E eine nichtleere Menge. Dann ist die Potenzmenge $M = \mathcal{P}(E)$ mächtiger als E.

Beweis:

1. Die Abbildung $f|E \to M$ mit $f(x) = \{x\}$, die jedem Element $x \in E$ die eindeutige Teilmenge $\{x\} \in M$ zuordnet ist injektiv.
2. Angenommen, es gäbe eine bijektive damit auch surjektive) Abbildung $g|E \to M$ Es sei $A = \{x \in E | x \notin g(x)\} \in M$

(A ist Teilmenge von E). Da g surjektiv ist, gibt es ein Element $a \in E$ mit $g(a) = A$

Fallunterscheidung:

1. $a \notin A = g(a) \to a \in A$ (Widerspruch)
2. $a \in A = g(a) \to a \notin A$ (Widerspruch)

Beide Fälle führen auf Widerspruch, es gibt also keine surjektive Abbildung, damit auch keine bijektive Abbildung von E auf $\mathcal{P}(E)$.|

Diskussion: Satz 6 zeigt, dass es unendlich viele unendliche Mächtigkeiten gibt. Zum Beispiel gibt $|\mathbb{N}| < |\mathcal{P}(\mathbb{N})| < |\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))|$ usw.

Satz 7 Die Potenzmenge $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ der Menge der natürlichen Zahlen ist gleichmächtig dem Intervall (0;1), also überabzählbar.

Beweis: s ÜA 1.38

Prinzip der vollständigen Induktion Es sei $n_0 \in \mathbb{N}$. Zu beweisen ist: „Für alle natürlichen Zahlen $n \geq n_0$ gilt die Aussage $p(n)$“ Es sind also abzählbar unendlich viele Aussagen zu beweisen.

Satz 8

1. Es sei $p(n_0)$ wahr. (Induktionsanfang)
2. Für alle natürlichen Zahlen $n \geq n_0$ sei die Implikation $p(n) \to p(n+1)$ wahr (Induktionsschluss)

Dann gilt: $p(n)$ ist für alle $n \geq n_0$ wahr.

Zum Beweis:

1. $\curvearrowright p(n_0)$ wahr
2. $p(n_0) \to p(n_0+1)$

Prämisse wahr, Implikation wahr $\curvearrowright$ Konklusion $p(n_0+1)$ wahr usw.

Beispiel 14: Zu beweisen ist

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \text{ für alle } n \in N^*$$

1. $p(1) : 1^2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6}$ (wahr) Induktionsanfang
2. Es gelte $p(n) : \sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

zu zeigen $p(n+1) : \sum\limits_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

Induktionsschluss: $p(n) \to p(n+1)$

$\sum\limits_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2$

$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$

$= \frac{n+1}{6}(n(2n+1) + 6(n+1)) = \frac{n+1}{6}(2n^2 + 7n + 6)$

$= \frac{n+1}{6}(n+2)(2n+3)|$

1.3 Zahlen

1.3.1 Gruppen, Ringe Körper

- Geg. sei eine Menge M und eine zweistellige Operation $\circ$ (d.h. Abbildung $M \times M \to M$), Bezeichnung $(M, \circ)$, analog bei 2 Operationen $(M, \circ, *)$
- Die Operation $\circ$ heißt kommutativ, wenn $a \circ b = b \circ a$ und assoziativ, wenn $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ für beliebige $a, b, c \in M$ gilt.

Definition 1 $(M, \circ)$ heißt Gruppe, wenn gilt:

1. Die Operation $\circ$ ist assoziativ
2. Es gibt genau ein neutrales Element $e \in M$ mit $a \circ e = e \circ a = a$ (für alle $a \in M$).
3. Es gibt zu jedem $a \in M$ genau ein inverse Element a^{-1} mit $a^{-1} \circ a = a \circ a^{-1} = e$
4. Eine Gruppe heißt ABELsch , wenn zusätzlich gilt: $\circ$ ist kommutativ

Definition 2 $(M, \oplus, *)$ heißt Ring, wenn gilt:

1. $(M, \oplus)$ ist ABELsche Gruppe
2. Die Operation $*$ ist assoziativ
3. Es gelten für beliebige $a, b, c \in M$
   $a * (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus (a * c)$
   $(a \oplus b) * c = (a * c) \oplus (b * c)$ (Distributivgesetz)
   Eine Ring heißt kommutativer Ring, wenn gilt
4. $*$ ist kommutativ

Definition 3 $(M, \oplus, *)$ heißt Körper, wenn gilt:

1. $(M, \oplus, *)$ ist ein Ring (mit dem neutralen Element 0 für die Operation $\oplus$)
2. $(M \backslash \{0\}, *)$ ist ABELsche Gruppe mit dem neutralem Element 1 für die Operation $*$

1.3.2 Zahlentheorie

- Eine natürliche Zahl $p > 1$, die nur durch 1 und sich selbst teilbar ist, heißt Primzahl
- Jede natürliche Zahl $n > 1$ ist entweder eine Primzahl oder sie lässt sich als Produkt von Primzahlen schreiben. Diese Primzahlenfaktorzerlegung ist bis auf die Reihenfolge eindeutig.

Definition 4 Zwei natürliche Zahlen heißen teilerfremnd, wenn sie außer 1 keine gemeinsamen Teiler besitzen.

Es sei $a \in \mathbb{Z}$ und $m \in \mathbb{N}^*$ Dann gibt es eine eindeutige Darstellung der Gestalt $a = q \cdot m + r$ mit $0 \leq r < m$ und $q \in \mathbb{Z}$ Bezeichunungen
m ... Modul
r ... (kleinste nicht neg) Rest modulo m
$r = mod(a, m)$

Zur Erinnnerung: a und b seien ganze Zahlen, $m \in \mathbb{N}^*$, dann $a \equiv b(\mod m)$ [a kongruent b modulo m] $\Leftrightarrow$ a und b haben den gleichen Rest modulo $m \Leftrightarrow a - b$ ist durch m teilbar. D.h. $\forall k \in \mathbb{Z}\ a - b = k \cdot m$

Satz 1 Es sei $a \equiv b(\mod m)$, $c \equiv d(\mod m)$, dann gilt:

$$a + c \equiv b + d(\mod m) \text{ und } a \cdot c \equiv b \cdot d$$

d.h. in Summen und Produkten darf jede Zahl durch einen beliebigen Vertreter der gleichen Restklasse ersetzt werden

Bemerkung: z.B. Restklasse 1 (modulo 7): $\{..., -20, -13, -6, 1, 8, 15, 22, ...\}$

Beispiel 1 (Modulo m=6)

1. $307 + 598 \equiv 1 + (-2) \equiv -1 \equiv 5(\mod 6)$
2. $307 \cdot 598 \equiv 1 \cdot (-2) \equiv -2 \equiv 4(\mod 6)$
3. $598^6 \equiv (-2)^6 \equiv 64 \equiv 4(\mod 6)$

Man wählt aus jeder Restklasse den kleinsten nichtnegativen Vertreter $\curvearrowright$ Menge von Resten modulo m $\{0, 1, 2, ..., m-1\} =: \mathbb{Z}_m \curvearrowright$ Modulare Arithmetik: Operationen $\oplus$ und $\odot$ für Zahlen aus $\mathbb{Z}_m$ erklärbar, indem für das Ergebnis jeweils der kleinste nichtnegative Rest modulo m gewählt wird (vgl. Satz 1). Z.B. für $\mathbb{Z}_7 = \{0, 1, 2, ..., 6\}$: $5 \oplus 6 = 4$ (da $5 + 6 \equiv 11 \equiv 4(\mod 7)$) $5 \odot 6 = 2$, denn $5 \cdot 6 \equiv 30 \equiv 2 \mod 7$)
Falls keine Verwechslungen zu befürchten sind, werden die üblichen Schreibweisen $+$ und $\cdot$ anstelle $\oplus$ bzw. $\odot$ benutzt.

Definition 5 Wenn es zum $c \in \mathbb{Z}_m$ eine Zahl $d \in \mathbb{Z}_m$ gibt mit $c \cdot d \equiv 1(\mod m)$ (bzw. $c \odot d = 1$), so heißt d die (multiplikative) modulare Inverse von c in $\mathbb{Z}_m$
Bezeichnung: $d = c^{-1}$

Beispiel 2: $c = 3 \in \mathbb{Z}_7$, wegen $3 \cdot 5 \equiv 1(\mod 7)$ ist in $\mathbb{Z}_7 : 3^{-1} = 5$

Satz 2 Zu $a \in \mathbb{Z}_m$, $a \neq 0$, gibt es genau dann eine modulare Inverse in $\mathbb{Z}_m$, wenn a und m teilerfremd sind.

Satz 3 Es sei p eine Primzahl. Dann ist $(\mathbb{Z}_p, \oplus, \odot)$ ein Körper.
Bemerkung: Falls m keine Primzahl ist, so ist $(\mathbb{Z}_m, \oplus, \odot)$ nur ein kommutativer Ring.

Euklidischer Algorithmus

- Verfahren zur Ermittlung des größten gemeinsamen Teilers t zweier positiver natürlicher Zahlen $T = ggT(a, b)$
- In erweiterter Form bietet der Algorithmus eine Möglichkeit zur Berechnung der modularen Inversen von a zum Modul m ($a < m, a$ und m teilerfremd).b

Satz 4 (EUKLIDischer Algorithmus)
Es seien $a, b \in \mathbb{N}^*$, $a > b$. Man bildet die (endliche) Folge

$$r_0 := b\,, r_1 = \mod(a,b), r_2 = \mod(r_0, r_1), ...$$

$$...r_n = \mod(r_{n-2}, r_{n-1})\,, \text{Abbruch falls } r_n = 0$$

In diesem Fall gilt

$$\text{ggT}(a,b) = r_{n-1}$$

(letzter, nicht verschwindender Rest)

$$[\text{ggT}(m,n) \cdot \text{kgV}(m,n) = |m \cdot n|]$$

Bezeichnungen: j-te Division
$r_{j-2} : r_{j-1} = q_j$ Rest r_j $(j = 1, ..., n)$
(dabei $r_{-1} = a$)

Satz 5 (erweiterter EUKLIDischer Algorithmus)
Zusätzlich zur Folge (r_n) aus Satz 4 bilde man die Folgen

$$x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = x_0 - q_2 x_1, ..., x_j = x_{j-2} - q_j x_{j-1}$$

$(j \leq n-1)$ und

$$y_0 = 1, y_1 = -q_1, y_2 = y_0 - q_2 y_1, ..., y_j = y_{j-2} - q_j y_{j-1}$$

$(j \leq n-1)$
Dabei ist q_j der ganzzahlige Quotient bei der Division von r_{j-2} durch r_{j-1}, d.h. $r_{j-2} = q_j r_{j-1} + r_j$ [und $-q_1 = \frac{r_1 - a}{b}$]
Dann gilt für alle $j = 0, ..., n-1$: $r_j = x_j a + y_j \cdot b$ Insbesondere gilt $ggT(a,b) = x_{n-1} a + y_{n-1} b$

Diskussion:

1. Der Sinn des erweiterten EUKLIDischen Alg. besteht darin, in jedem Schritt den Divisionsrest als Linearkombination von a und b mit ganzzahligen Koeffizienten x und y darzustellen:
$$r = x \cdot a + y \cdot b$$
Der Mechanismus wird am besten im nachfolgendem Beispiel 4 deutlich

2. Sind c und m teilerfremd, $1 \leq c < m$, d.h. $ggT(c,m) = 1$, so erhält man mit Satz 5 $(a = m, b = c)$ eine Darstellung der Form $1 = x \cdot m + y \cdot c \curvearrowright y \cdot c \equiv 1(\mod m)$ und damit $c^{-1} \equiv y(\mod m)$
(Für die modulare Inverse muss eventuell noch der in $\mathbb{Z}_{m-1}$ liegende zu y kongruente Wert ermittelt werden)

Beispiel 3: Man ermittle den größten gemeinsamen Teiler t sowie das kleinste gemeinsame Vielfache v der Zahlen 132 und 84

- Es genügt der „einfache“ Algorithmus:

$$\begin{aligned}
132 : 84 &= 1 \text{ Rest } 48\\
84 : 48 &= 1 \text{ Rest } 36\\
48 : 36 &= 1 \text{ Rest } 12 \curvearrowright t = ggT(132, 84) = 12\\
36 : 12 &= 3 \text{ Rest } 0_{\text{ENDE}}
\end{aligned}$$

- $v = \frac{a \cdot b}{t} = \frac{132 \cdot 84}{12} = 924$

Beispiel 4: Man ermittle die modulare Inverse von $\underbrace{11}_{b}$ zum Modul $\underbrace{25}_{a}$

Eulersche φ-Funktion Satz von EULER

Definition 6 Es sei $n \in \mathbb{N}^*$. Dann EULERsche φ-Funktion:

$$\varphi(n) := \text{ Anzahl der zu } n \text{teilerfremden Elemente aus } \{1, 2, ..., n\}$$

Eigenschaften der φ-Funktion

- Es sei φ eine Primzahl, dann gilt $\varphi(p) = p - 1$, $\varphi(p^k) = p^{k-1}(p - 1)$
- Falls $ggT(m, n) = 1$, so gilt $\varphi(m \cdot n) = \varphi(m) \cdot \varphi(n)$
  Speziell

$$n = p \cdot q; p \text{ und } q \text{ Primzahlen, dann } \varphi(n) = (p - 1)(q - 1) \tag{1}$$

Satz 6 (Satz von EULER)
Es sei $ggT(a, n) = 1$, dann gilt

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1(\mod n) \tag{2}$$

RSA-Verschlüsselung

- Die Formeln 1 und 2 bilden die Grundlage für die sogenannte RSA-Verschlüsselung. (RIVEST, SHARMIR, ADLEMAN 1978)
- Schlüsselerzeugung
  1. Man wählt (in der Praxis sehr große) Primzahlen p und q
  2. $n := pq$; $m := \varphi(n) = (p - 1)(q - 1)$
  3. e wird so gewählt, dass $ggT(e, m) = 1$ ist
  4. $d := e^{-1}(\mod m)$ (modulare Inverse)

5. (n, e) ... öffentlicher Schlüssel

(n, d) ... geheimer Schlüssel (geheim ist nur d) p, q und m werden nicht mehr benötigt, bleiben aber geheim!

- Verschlüsselung: Klartext a teilerfremd zu n verschlüsseln mit e, d.h. $b :\equiv a^e(\mod n)$ bilden $\rightarrow b$ ... Geheimtext
- Entschlüsselung: Der Empfänger und Besitzer des geheimen Schlüssels bildet $b^d(\mod n)$ und erhält $b^d \equiv a(\mod n)$, denn $b^d \equiv (a^e)^d \equiv a^{ed} \equiv a^{1+k\cdot m} \equiv a^{1+k\varphi(n)} \equiv a \cdot (\underbrace{a^{\varphi(n)}}_{\equiv 1 \text{ wegen } 1})^k \equiv a(\mod n)$
- Praktische Durchführung vgl. ÜA 2.4

1.3.3 Reelle Zahlen

$\mathbb{R}$ ... Menge der reellen Zahlen
Auf $\mathbb{R}$ existiert eine algebraische Struktur und Ordnungsstruktur.

Algebraische Struktur $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ mit den Operationen $+$ (Addition) und $\cdot$ (Multiplikation) ist ein Körper.

Definition 7

1. $0! := 1$; $n! := n \cdot (n-1)!$ $(n \in \mathbb{N}^*)$
   rekursive Definition)
2. Sei $\alpha \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}^*$ dann:
   $\binom{\alpha}{0} := 1, \binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha}{k} \cdot \binom{\alpha-1}{k-1}$ ... Binominalkoeffizient „α über k“
   $\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-k+1)}{k!}$

Diskussion

1. Für $k, n \in \mathbb{N}$, $o \leq k \leq n$ gilt:
   $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
2. Binomischer Satz

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + ... + b^n$$

Stellenwertsysteme

- Es sei $b > 1$ eine natürliche Zahl (die sogenannte Basis)
- $$\begin{aligned} x = (x_p x_{p-1} ... x_1 x_0, x_{-1} x_{-2} ... x_{-q})_b := x_p \cdot b^p + x_{p-1} \cdot b^{p-1} + ... \\ + x_1 \cdot b^1 + x_0 b^0 + x_{-1} b^{-1} + ... + x_{-q} b^{-q} \end{aligned} \tag{3}$$

  heißt Darstellung von x zur Basis b.
- Übergang von einem Ziffernsystem zu einem anderen Grundlage: Aus 3 ergibt sich durch fortgesetztes Klammern

  $$\begin{aligned} x = ((...((x_p b + x_{p-1})b + x_{p-2})b + ... + x_2)b + x_1)b + x_0 \\ ((...(x_{-q} b^{-1} + x_{-(q-1)})b^{-1} + ... + x_{-2})b^{-1} + x_{-1})b^{-1} \end{aligned} \tag{4}$$

Beispiel 8:

1. $(A8C, B2)_{16} = (1010\,1000\,1100, 1011\,0010)_2$
2. $(\underbrace{110}_{6}\,\underbrace{1110}_{14=E}, \underbrace{101(0)}_{10=A})_2 = (6E, A)_{16}$

Zahlendarstellung im Computer

Ganze Binärzahlen in Zweierkomplementdarstellung (n Bit, mit n=8,16,32,64)

- Beispiel: $n = 8 : (100)_{10} = (64)_{16}$
  01100100
  $\underbrace{2^7}_{\text{MSB}} 2^6 2^5 2^4 2^3 2^2 2^1 \underbrace{2^0}_{\text{LSB}}$
  MSB. . . most significant bit
  LSB. . . least siginificant bit
- Um auch negative Zahlen darstellen zu können, wird das MSB als Vorzeichenbit reserviert. Negative zahlen $-a$ $(1 \leq a \leq 2^{n-1})$ werden im sogenannten Zweierkomplement $\bar{a} := 2^n - a$ $\quad (\curvearrowright \bar{a} \leq 2^{n-1} \curvearrowright \text{MSB} = 1)$
- Nichtnegative Zahlen $0 \leq a \leq 2^{n-1} - 1$ werden unverändert dargestellt. (MSB = 0)
- Damit Darstellung ganzer Zahlen von -2^{n-1} bis $2^{n-1} - 1$

Umwandlung negativer Zahlen in Zweierkomplement Beispiel 9: $(n = 8)$ umzuwandeln sei $-100(dezimal)$

1. Möglichkeit (für die Handrechnung):
   $\overline{100} = \underbrace{2^8}_{256} - 100 = \underbrace{156}_{(9C)_{16}} = 10011100$

   Bemerkung: Das Zweierkomplement der positiven Zahl 100 ist die positive Zahl $\overline{100} = 156$, diese wird wegen MSB = 1 als negative Zahl -100 interpretiert.

2. Möglichkeit (am schnellsten!) Rechts (bzw. LSB) beginnend alle Ziffern bis einschließlich der ersten 1 unverändert lassen, für alle höherwertigen Ziffern z das Einerkomplement $1 - z$ bilden.
   $100 : 0110\,0100$
   $\overline{100} : 1001\,1100$

Rückumwandlung (Zahl ist mit MSB = 1 $\rightarrow$ negative Zahl) analog $\overline{156} = 256 - 156 = 100 \curvearrowright -100$
Die Subtraktion wird auf die Addition des Zweierkomplements zurückgeführt.
Beispiel 10: $a = 64 - 100 = 64 + (-100)$
Bemerkung: Für die Handrechnung (z.B.) $2 - 5 =: a$) kleinere Zahl von der größeren Subtrahieren $a = -(5 - 2)$, daher genügt für n die Binärstellenzahl des Minuenden $(5)_{10} = (101)_2$, also $n = 3$.
Es wird ausschließlich mit nichtnegativen Zahlen gerechnet:
$(5 - 2)_{10} = ((5 + \underbrace{2^n - 2}_{\bar{2}}) - 2^n)_{10} = (5 + \bar{2} - 2^n)_{10}$
$2 = (010)_2 \curvearrowright \bar{2} = (110)_2$
5101+
$\bar{2}$110
(1)011 vordere Stelle ignorieren (2^n)
$\curvearrowright 5 - 2 = 3 \curvearrowright a = -3$
Verallgemeinerung: Festkommasystem (feste Stellenzahl, Komma an fester Stelle).
Vorteil: rundungsfreie Rechnung, nur Überlauf [1] muss beachtet werden

Nachteil: Nur sehr beschränkter Zahlenbereich darstellbar $\rightarrow$

Gleitkommasystem

$$x = v \cdot m \cdot b^e$$

- $v = (-1)^V \ldots \text{Vorzeichen} = \begin{cases} V = 0 & \text{positive Zahl} \\ V = 1 & \text{negative Zahl} \end{cases}$

[1] Ein Überlauf (Ergebnis $\geq 2^{n-1}$ oder $< -2^{n-1}$) entsteht in folgenden Fällen ERROR:

	a	b	$a+b$
MSB	0	0	1
MSB	1	1	0

- m ... Mantisse, Stellenzahl p, die Mantisse heißt normalisiert, falls sie die Gestalt $m_1, m_2 m_3 ... m_p$ oder $0, m_1 m_2 ... m_p$ mit $m_1 \neq 0$, dabei $m_1, ..., m_p$ Ziffern zur Basis b
- e ... Exponent, ganzzahlig $e_{min} \leq e \leq e_{max}$

In jedem Gleitkommasystem sind nur endlich viele Zahlen darstellbar, Die Menge der reellen Zahlen ist aber überabzählbar (unendlich). Gleitkommazahlen liegen auf der reellen Zahlenachse diskret verteilt (fester Exponent $\curvearrowright$ gleiche Abstände, wächst der Exponent um k, so wachsen die Abstände auf das b^k-fache)
Veranschaulichung für $b = 10$, Mantissenlänge $p = 1$

Rundung: Zahlen die nicht in dieses „Raster“ passen, werden auf die nächstgelegene Gleitkommazahl gerundet.
Falls die Zahl genau in der Mitte zwischen zwei „Rasterzahlen“ liegt, wird auf die nächstgelegene gerade Zahl gerundet.

Numerische Probleme beim Rechnen mit Gleitkommazahlen

- Kommutativ-, Assoziativ- und Distributivgesetze gelten allgemein nicht. Ursachen sind z.B. Ziffernauslöschung bei Subtraktion von fast gleichen Zahlen, Addition oder Subtraktion von Zahlen unterschiedlicher Größenordnung, Aufsummierung von Rundungsfehlern.
- Beispiel 11: Man berechne $(a+b)+c$ und $a+(b+c)$ in einem System mit 3-stelliger Mantisse:
  $a = 3,73 \cdot 10^6, b = -3,71 \cdot 10^6, c = 6,42 \cdot 10^3$
  $a+b = 0,02 \cdot 10^6 = 2,00 \cdot 10^4$ (Normalisierung) $c = 6,42 \cdot 10^3 = 0,642 \cdot 10^4 = 0,64 \cdot 10^4$ (Exponentenausgleichung und Rundung).
  $\curvearrowright (a+b)+c = 2,64 \cdot 10^4 = \underline{\underline{26400}}$
  $c = 0,00642 \cdot 10^6 = 0,01 \cdot 10^6$ (Exponentenausgleichung und Rundung)
  $\curvearrowright b+c = -3,70 \cdot 10^6$
  $\curvearrowright a+(b+c) = 0,03 \cdot 10^6 = 3,00 \cdot 10^4 = \underline{\underline{30000}}$
  exakter Wert: $a+b+c = \underline{\underline{26420}}$
- Aufgabe der numerischen Mathematik ist es, die unvermeidlichen Genauigkeitsverluste beim Rechnen mit Maschinenzahlen durch optimale Organisation der Rechnung und Fehleranalyse in Grenzen zu halten.

Gleitkommaformel IEEE 754 (single precision, 32 Bit)

$$x = v \cdot m \cdot b^e = (-1)^V \cdot 1, m_2 m_3 \cdot ... \cdot m_{24} \cdot 2^{E-B} (b = 2)$$

- Vorzeichen $V = 0 \curvearrowright$ positiv, $V = 1 \curvearrowright$ negativ (1Bit)
- Mantisse m_1 im Binärsystem stets $= 1 \curvearrowright$ nur Abspeicherung von $M = m_2 m_3 \ldots m_{24}$ (23 Bit)

- Exponent Abgespeichert wird $E := e + B$, (mit dem sogenannten Biaswert $B = 127$) als nichtnegative 8-stellige Binärzahl, (8 Bit)
  $e_{min} = -126(E = 1), e_{max} = 127(E = 254 = 1111\,1110)_2)$
  (Die Grenzfälle $E = (0000\,0000)_2$ und $E = (1111\,1111)_2$ sind für Sonderfälle vorgesehen $(0, \infty$, nicht definierte Werte))

- Abspeicherung in der Reihenfolge $V|E|M$

Beispiel 12 Umwandlung Dezimalzahl IEEE 754 (32-Bit) $x = 435,9$ (vgl. Beispiel 6)

1. Konvertierung in Dezimalzahl (unter Verwendung von Beispiel 6 /Hexadezimalzahl)

$$x = (1\underbrace{B}_{11}3,\underbrace{E}_{14}\bar{6})_{16} = (1\,1011\,0011, 1110\ \underbrace{0110}_{\text{Periode}}\ \underbrace{0110}\ \underbrace{...})_2$$

2. Normalisierte Darstellung, Mantisse mit 23 Stellen nach Komma $\curvearrowright$

$$x = (1,\underbrace{1011\,0011\,1110\,0110\,0110\,011}_{M\text{ (Abrundung!)}}|0\,0110\,...)_2 \cdot 2^8$$

3. Exponent $e = 8 \curvearrowright E = e + B = 8 + 127 = 135 = (87)_{16} = (1000\,0111)_2$

4. $V = 0$ (da x positiv)
   $\curvearrowright x \cdot 0|\,1000\,0111|\,1011\,0011\,1110\,0110\,0110\,011$

Beispiel 13 IEEE754 Dezimalzahl
$1|\,1000\,0011|\,0111\,1100\,0000\,0000\,0000\,000$

1. $E = (1000\,0011)_2 = 131 \curvearrowright e = E - B = 131 - 127 = 4$

2. $V = 1 \curvearrowright x < 0$, normalisierte Mantisse $1, M$
   $\curvearrowright \underline{x} = -(1,\ 0111\,11)_2 \cdot 2^4 = -(1\,0111, 11)_2 = \underline{\underline{-23,75}}$

Bemerkungen:

1. Neben dem single Format gibt es in IEEE 754 u.a. das double Format (64 Bit , V=1 Bit, E=11 Bit, M=52 Bit, $B = 2^{10} - 1 = 1023$)

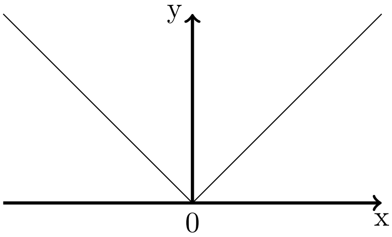
2. Zahlenbereiche:
   single: $1,401 \cdot 10^{-45}...3,403 \cdot 10^{38}$
   double: $4,941 \cdot 10^{-324}...1,798 \cdot 10^{308}$

Ordnungsstrutkur

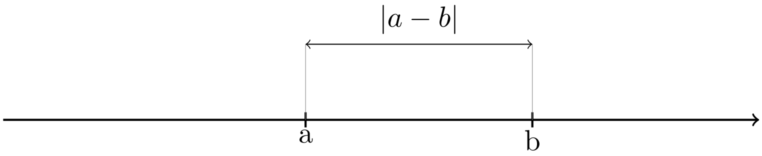
- Durch $\leq$ ist auf $\mathbb{R}$ eine vollständige Ordnungsrelation erklärt.
- Verträglichkeit mit der algebraischen Struktur: $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$:

  1. $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$
  2. $(x \leq y) \wedge (z \geq 0) \Rightarrow x \cdot z \leq y \cdot z$
  3. $(x \leq y) \wedge (z \leq 0) \Rightarrow x \cdot z \geq y \cdot z$

Definition 8 Es sei x eine reelle Zahl. Dann heißt $|x| := \begin{cases} x & \text{falls} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{falls} \quad x < 0 \end{cases}$ der (absolute) Betrag von x.



Diskussion: Es gilt $|a - b| =$ „Abstand der Zahlen a und b auf der Zahlengeraden“

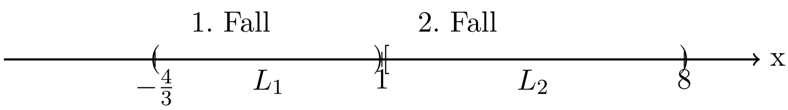


Speziell $|a| \ldots$„Abstand von a zum Ursprung 0“
Lösen von Ungleichungen
Beispiel 14 (Ungleichung von Beträgen)
Gesucht Lösungsmenge L der reellen Zahlen, die die Ungleichung

$$|x - 1| < 3 + \frac{1}{2} \cdot x \tag{5}$$

erfüllen.

- “kritische„ Stellen: Nullstelle des Terms innerhalb der Betragszeichen, also $x = 1$
  $\curvearrowright$ Fallunterscheidung



  Dabei jeweils Beträge auflösen gemäß Definition 8

- 1. Fall

$$\begin{aligned} x<1, \quad (5) &\Leftrightarrow -(x-1) < 3+\frac{1}{2}x \\ \text{d.h. } x-1<0 \quad &\Leftrightarrow -\frac{3}{2}x < 2 \quad | : (-\frac{3}{2}) \\ &\Leftrightarrow \underline{\underline{x > -\frac{4}{3}}} \end{aligned}$$

$\curvearrowright L_1 = \{x | x < 1 \wedge x > -\frac{4}{3}\} = \underline{\underline{(-\frac{4}{3}; 1)}}$

- 2. Fall

$$\begin{aligned} x \geq 1, \quad (5) &\Leftrightarrow (x-1) < 3+\frac{1}{2}x \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2}x < 4 \quad | : \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow x < 8 \end{aligned}$$

$\curvearrowright L_2 = \{x | x \geq 1 \wedge x < 8\} = \underline{\underline{[1; 8)}}$
$\curvearrowright L = L_1 \cup L_2 = \underline{\underline{(-\frac{4}{3}, 8)}}$

Beispiel 15 (Ungleichungen mit gebrochen rationalen Termen)

$$\frac{x}{x+1} < 1 \quad | \cdot (x+1) \tag{6}$$

- Falls $x+1<0$ kehrt sich Ungleichungszeichen um! $\curvearrowright$ Fallunterscheidung
- kritische Stelle(n): Nenner-Nullstellen, hier $x=-1$
- 1. Fall: $x<-1 \quad (6) \Leftrightarrow x > x+1 \Leftrightarrow 0 > 1 \quad \curvearrowright$ Widerspruch
  $x+1<0$
  $\curvearrowright \underline{\underline{L_1 = \varnothing}}$
- 2. Fall: $x > -1 \quad (6) \Leftrightarrow x < x+1 \Leftrightarrow 0 < 1$ (wahre Aussage)
  $\curvearrowright L_1 = \{x | x > -1 \wedge 0 < 1\} = \underline{\underline{(-1; \infty)}}$
  $\curvearrowright L = L_1 \cup L_2 = \underline{\underline{(-1; \infty)}}$

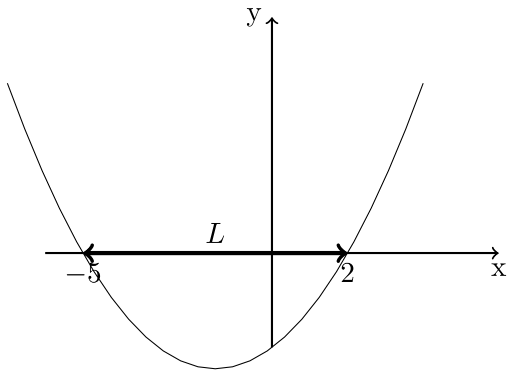
Beispiel 16 (quadratische Ungleichungen)

$$\begin{aligned} x^2+3x < 10 &\Leftrightarrow (x+\frac{3}{2})^2 - \frac{9}{4} < 10 \\ &\Leftrightarrow (x+\frac{3}{2})^2 < \frac{49}{4} \\ &\Leftrightarrow |x+\frac{3}{2}| < \frac{7}{2} \\ &\Leftrightarrow -\frac{7}{2} < x+\frac{3}{2} < \frac{7}{2} \\ &\Leftrightarrow \underline{\underline{-5 < x < 2}} \end{aligned}$$

Diskussion:

- In vielen Fällen ist auch ein grapischer Lösungsansatz möglich. Dabei sind geeignete Schnittpunkte (= Gleichung) exakt rechnerisch zu ermitteln, anschließend Ungleichungszeichen betrachten.
- Im Beispiel 16: $x^2 + 3x < 10 \Leftrightarrow \underbrace{x^2 + 3x - 10}_{=:f(x)} < 0$

  Nullstellen von $f(x) : x^2 + 3x - 10 = 0 \curvearrowright x_1 = -5,\ x_2 = 2$

  $\curvearrowright L = (-5; 2)$

Schranken und Grenzen

- Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ heißt nach oben beschränkt, wenn es eine obere Schranke gibt, vgl. Kapitel 1.2..
  Man kann zeigen, dass es bei dieser Ordnungsrelation $(\leq)$ auf $\mathbb{R}$ dann auch eine kleinste obere Schranke s gibt.
  (= Supremum $\sup M$; $s = \max M$ falls $s \in M$)
- Analog: nach oben beschränkt, Infimum, Maximum
- Falls M nicht nach oben beschränkt ist, d.h. falls gilt:
  $\exists a \in \mathbb{R} \forall x \in M\ x \leq a \equiv \forall a \in \mathbb{R} \exists x \in M\ x > a$, dann
  Schreibweise $\sup M := \infty$
- Analog: $\inf M = -\infty$
- M heißt beschränkt, falls M nach oben und unten beschränkt ist.

Beispiel 17 $\quad M = \{1 + \frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}^*\}$

- obere Schranken z.B: $3712; \pi; 2,01$
  kleinste obere Schranke $\sup M = \max M = 2$
- untere Schranken: z.B: $-31; 0; 0,99$
  größte untere Schranke $\inf M = 1$
  $1 \notin M \curvearrowright \min M$ existiert nicht!

1.3.4 Komplexe Zahlen

Motivation: z.B. $x^2 = -1$ im Bereich der reellen Zahlen nicht lösbar $\curvearrowright$ Zahlenbereichserweiterung

Begriff, Rechenregeln Die Menge $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen ist eine Obermenge der Menge der reellen Zahlen mit folgenden Eigenschaften:

1. $\mathbb{C}$ enthält eine Zahl i mit $i^2 = -1$ (oft auch j bezeichnet)
2. Jede komplexe Zahl z lässt sich in der Form $z = x + i \cdot y \quad (x, y \in \mathbb{R})$ darstellen. Dabei

$$\begin{aligned} x &= Re(z) \ldots \text{Realteil} \\ y &= Im(z) \ldots \text{Imaginärteil} \end{aligned}$$

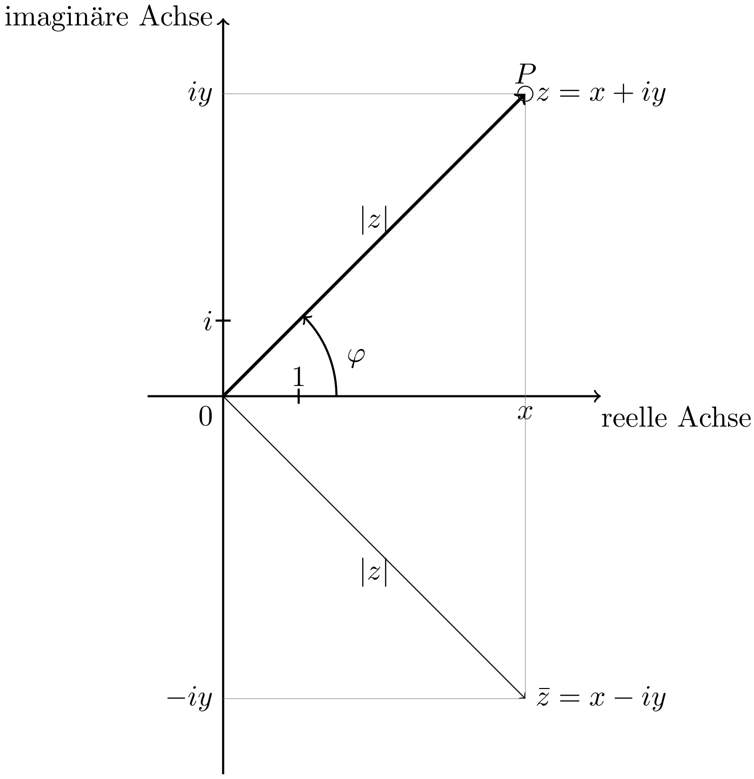
3. Auf $\mathbb{C}$ werden die Operatoren $+$ (Addition) und $\cdot$ (Multiplikation) wie folgt erklärt: Es seien $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$

   Dann:
   $z_1 + z_2 := x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2)$
   $z_1 \cdot z_2 := x_1 \cdot x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$

   Die Menge $\mathbb{C}$ wird mit diesen Operationen zum Körper der komplexen Zahlen. Die arithmetischen Operationen erfolgen unter Beachtung von $i^2 = -1$ wie im Reellen.

4. Auf $\mathbb{C}$ gibt es keine natürliche Ordnungsrelation.

Veranschaulichung: Gausssche Zahlenebene
Zahl $z \leftrightarrow$ Punkt $P(x, y) \leftrightarrow \overrightarrow{OP}$ (Vector)

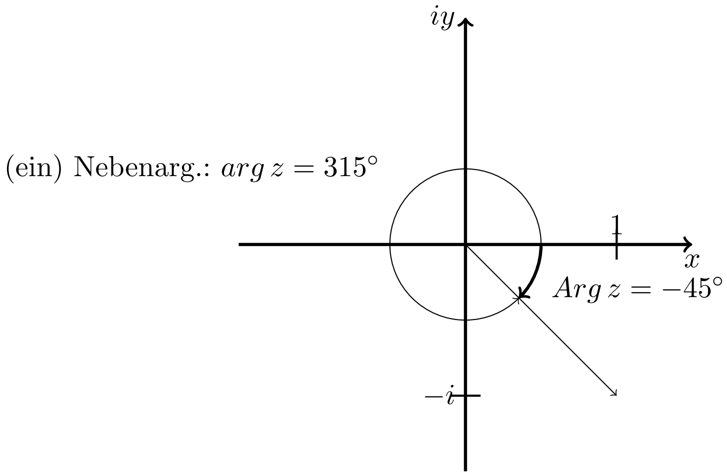


- Betrag von z : $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$
- Hauptargument von z: orientierter Winkel φ von positiver x-Achse zum Strahl $\overrightarrow{OP}$ (gemessen auf kürzestem Wege!)
  $\curvearrowright Arg\, z := \varphi(-\pi < \varphi \leq \pi)$
- $\bar{z} = x - iy$ ... die zu $z = x + iy$ konjugiert komplexe Zahl.

Diskussion:

1. Falls nicht notwendig kürzester Weg gewählt wird $\rightarrow$ Argument $arg\, z = Arg\, z + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

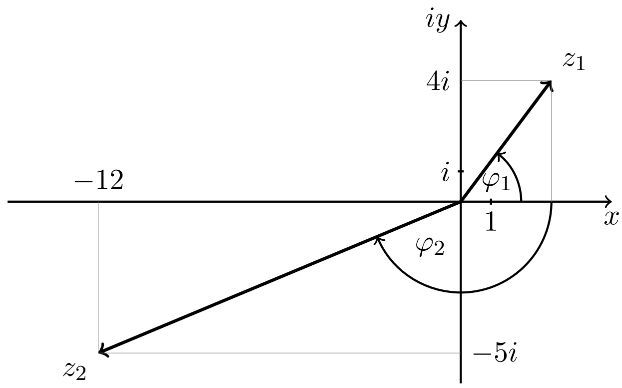
   z.B: $z = 1 - i$



2. Berechnung von $Arg\, z (z \neq 0)$: $\cos\varphi = \frac{x}{|x|} \curvearrowright$

$$Arg\, z = \begin{cases} \arccos(\frac{x}{|z|}) & \text{falls} \quad y \geq 0 \\ -\arccos(\frac{x}{|z|}) & \text{falls} \quad y < 0 \end{cases}$$

Beispiel 18: $z_1 = 3 + 4i$, $z_2 = -12 - 5i$

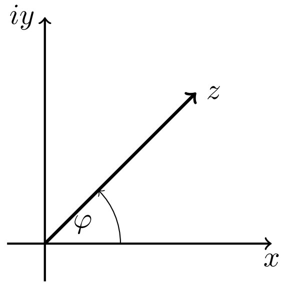


1. Betrag u. Hauptargument
   $|z_1| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$
   $\varphi_1 = Arg\, z_1 = \arccos\frac{3}{5} = \underbrace{53,13°}_{\text{Gradmaß=DEG}}$
   $|z_2| = \sqrt{(-12)^2 + (-5)^2} = 13$
   $\varphi_2 = Arg\, z_2 = -\arccos\frac{-12}{13} = -157,38°$

2. Arithmetische Operationen
   Addition: $z_1 + z_2 = -9 - i$
   Subtraktion: $z_1 - z_2 = 15 + 9i$
   Multiplikation: $z_1 \cdot z_2 = -36 - 15i - 48i - 20\underbrace{i^2}_{-1} = -16 - 63i$

Division: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_2}$ (Erweiterung mit $\bar{z}_2 \curvearrowright$ Nummer wird reell $z_2 \cdot \bar{z}_2 = |z_2|^2$)
also: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{3+4i}{-12-5i} \cdot \frac{-12+5i}{-12+5i} = -\frac{56}{169} - \frac{33}{169}i$

Trigonometrische Darstellung EULERsche Formel, exponentielle Darstellung



(mit $\varphi = arg\, z$ meist $\varphi = Arg\, z$)

$x = |z| \cos\varphi$
$y = |z| \sup\varphi$
$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ (trigonometrische Darstellung.
Diskussion: $z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i \in \varphi_2)$
$\curvearrowright z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot$
Folgerung:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|,\ arg(z_1 \cdot z_2) = arg\, z_1 + arg\, z_2 \tag{7}$$

$$|\frac{z_1}{z_2}| = \frac{|z_1|}{|z_2|},\ arg(\frac{z_1}{z_2} = arg\, z_1 - arg\, z_2 \tag{8}$$

Definition 10

$$e^{i\varphi} := \cos\varphi + i\sin\varphi \text{ EULERsche Formel}$$

Diskussion:

1. Exponentielle Darstellung von z:

$$z = |z| \cdot e^{i\varphi}$$

2. Wegen der Formeln (7) und (8) bleiben für diese Darstellung die vom Reellen hier behaupteten Potenzgesetze gültig. Insbesondere gilt die Formel von MOIVRE:

$$z^n = (|z| \cdot e^{i\varphi})^n = |z|^n e^{in\varphi}$$

Beispiel 19:

- $z_1 = \underbrace{3+4i}_{\text{arithm.}} = \underbrace{5(\cos 53,13° + i\sin 53,13°)}_{\text{trigonometrisch}} = \underbrace{5 \cdot e^{i\cdot 53,13°}}_{\text{exponentiell}}$
  $z_2 = -12 - 5i = 13e^{-i\cdot 157,38°}$

- $z=-1+i$, gesucht z^{12}
  $|z|=\sqrt{2}$, $\quad Arg\, z = \arccos\frac{-1}{\sqrt{2}} = 135° = \frac{3\pi}{4} \curvearrowright z = \sqrt{2}e^{i\cdot\frac{3\pi}{4}}$
  $\curvearrowright z^{12} = \sqrt{2}^{12} e^{i\cdot 12\cdot\frac{3\pi}{4}} = 2^6 e^{i\cdot 9\pi} = 64\cdot e^{i\pi}$
  $\curvearrowright$ arithmetische Darstellung über die trigonometrische Darstellung
  $z^{12} = 64(\underbrace{\cos\pi}_{-1} + i\underbrace{\sin\pi}_{0}) = -64$

Spezielle Gleichungen

Quadratische Gleichung: $z^2+pz+q=0$ $(p,q\in\mathbb{R}$
$\Leftrightarrow (z+\frac{p}{2})^2 = \frac{p^2}{4}-q$

1. 1. Fall: $\frac{p^2}{4}-q\geq 0 \curvearrowright z_{1,2} = -\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$
2. 2. Fall: $\frac{p^2}{4}-q<0 \curvearrowright (z+\frac{p}{2})^2 = \frac{p^2}{4}-q \Leftrightarrow (z+\frac{p}{2})^2 + \underbrace{q-\frac{p^2}{4}}_{=:a^2>0} = 0$

   $\Leftrightarrow (z+\frac{p}{2}+ia)(z+\frac{p}{2}-ia)=0$

$\curvearrowright z_{1,2} = -\frac{p}{2}\pm i\cdot\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}$

Praktisches Vorgehen: Lösungsformel $z_{1,2} = -\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$ stets anwenden, im Fall 2 Formel $\sqrt{-1}=\pm i$ setzen

Beispiel 20: $x^2+28+200=0$
$\curvearrowright x_{1,2} = -14\pm\sqrt{196-200} = \underline{\underline{-14\pm 2i}}$

Kreisteilungsgleichung: $z^n=b$, $b\in\mathbb{C}$, $n\in\mathbb{N}^*$
Lösung:

- b exponentiell darstellen $b=|b|e^{i\beta}$, $\beta = Arg\, b$
- 1.3.4 besitzt die folgenden n Lösungen:
  $z_k = \sqrt[n]{|b|}\cdot e^{i\frac{\beta+k\cdot 360°}{n}}$, $k=0,1,2,...,n-1$

Zum Beweis: Ansatz $z=r\cdot e^{i\varphi} \curvearrowright z^n = r^n e^{in\varphi} = |b|e^{i\beta}$
$\curvearrowright 1: r^n = |b| \curvearrowright r = \sqrt[n]{|b|}$
$2: n\varphi = \beta + k\cdot 360° \curvearrowright \varphi = \frac{\beta+k360°}{n}$

Beispiel 21: $z^4=-16$ $\quad (b=-16 \curvearrowright |b|b=16, \beta=\pi=180°)$
d.h. $z^4 = 16\cdot e^{i\cdot 180°}$
$\curvearrowright z_k = 2\cdot e^{i\frac{180°+k\cdot 360°}{4}} = 2e^{i(45°+b\cdot 90°)}(k=0,1,2,3)$

$z_0 = 2e^{i45°}$ $=\sqrt{2}+\sqrt{2}i$	$z_1 = 2e^{i135°}$ $=-\sqrt{2}+\sqrt{2}i$	$z_2 = 2e^{i225°}$ $=-\sqrt{2}-\sqrt{2}i$	$z_3 = 2e^{i315°}$ $=\sqrt{2}-\sqrt{2}i$

Anwendung: Faktorisierung des Polynoms $p(x)=x^4+16$, Nullstellen z_0,z_1,z_2,z_3
$\curvearrowright x^4+16 = (x-z_0)(x-z_3)(x-z_1)(x-z_2) = \underline{\underline{(x^2-2\sqrt{2}x+4)(x^2+2\sqrt{2}x+4)}}$

Beispiel 22 R, C und L in Reihe (Stromkreis). $R = 100\Omega C = 20\mu F = 20 \cdot 10^{-6} \frac{As}{V}$ $L = 1H = 1\frac{Vs}{A}$ $\omega = 2\pi \cdot 50Hz$
Gesucht: Gesamtwiderstand Z. $Z = R + R_C + R_L = R + \omega Li + \frac{1}{\omega Ci} = R + i(\omega L - \frac{1}{\omega C}) = (100 + 155,04i)\Omega = 184,44e^{i \cdot 57,17°}$
Scheinwiderstand $|z| = 184,44\Omega$
Wirkwiderstand $Re(Z) = 100\Omega$
Blindwiderstand $Im(Z) = 155,04\Omega$
Phasenverschiebung $Arg(Z) = 57,17°$

1.4 Reellwertige Funktionen einer reellen Veränderlichen

1.4.1 Elementare Funktionen (Teil 1)

Polynome

Definition 1 $y = f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0$
$(a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R})$ heißt ganze rationale Funktion oder Polynom vom Grade n, falls $a_n \neq 0$

- Zur Berechnung der Funktionswerte zweckmäßig: HORNER-Schema, vgl Stellenwertsysteme
- HORNER-Schema liefert gleichzeitig das Ergebnis der Division durch den Linearfaktor $(x - x_0)$ vgl. Beispiel 1

Beispiel 1: $f(x) = x^5 - 2x^3 + x^2 - 6,\ x_0 = 3$
gesucht $f(x_0), f(x) : (x - x_0)$

	1	0	−2	1	0	−6
$x_0 = 3$		3	9	21	66	198
	1	3	7	22	66	$192 = r_0 = f(3)$

$f(x) : (x - 3) = x^4 + 3x^3 + 7x^2 + 22x + 66 + \frac{192}{x-3}$

Satz 1 Es sei $f(x) = p_n(x) = a_n x^n + \dots + a_0$ ein Polynom vom Grade n (d.h. $a_n \neq 0$). Dann besitzt f in $\mathbb{C}$ genau n Nullstellen $x_1, \dots, x_n$ und es gilt:

$$f(x) = a_n(x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n) \text{ (Zerlegung in Linearfaktoren)} \qquad (9)$$

Diskussion:

1. Falls in (9) ein Faktor $(x - x_0)$ genau k-mal vorkommt $(1 \leq k \leq n)$, so heißt x_0 eine k-fache Nullstelle
2. Nicht-reelle Nullstellen sind möglich, sie treten stets paarweise ls konjugiert komplexe Zahlen auf $(x_0, \overline{x_0})$. In diesem Falle Zusammenfassung der Linearfaktoren zu einem reellen quadratischen Faktor möglich:
$(x - x_0)(x - \overline{x_0}) = x^2 - (2Rex_0) \cdot x + |x_0|^2$

3. Falls $a_0, a_1, \ldots, a_n$ ganze Zahlen sind, so sind eventuell vorhandene ganzzahlige Nullstellen stets Teiler von a_0

4. Allgemeine Methoden zur Nullstellenberechnung später (Kap. 3)

Beispiel 2: $p(x) = x^4 + x^3 - 5x^2 + x - 6$, gesucht Nullstellen durch (systematisches) Probieren, vgl. Diskussion 3 $\underbrace{x_1}_{\text{Teiler von } 6: \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6} = 2$

HORNER-Schema

$$\begin{array}{r|rrrrl}
 & 1 & 1 & -5 & 1 & \quad -6 \\
x_1 = 2 & & 2 & 6 & 2 & \quad 6 \\
\hline
 & 1 & 3 & 1 & 3 & 0 \curvearrowright p(x) = (x-2)(x^3 + 3x^2 + x + 3) \curvearrowright \text{ durch Prob.: } x_2 = -3 \\
x_2 = -3 & & -3 & 0 & -3 & \\
\hline
 & 1 & 0 & 1 & 0 & \curvearrowright p(x) = (x-2)(x+3)(x^2+1) x_{3,4} = \pm i
\end{array}$$

Zerlegung in Linearfaktoren: $p(x) = (x-2)(x+3)(x-i)(x+i)$

Gebrochenrationale Funktionen

Definition 2 $y = f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_m x^m + \cdots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0}$
$(a_m \neq 0, b_n \neq 0, Db(f) = \{x \in \mathbb{R} | q(x) \neq 0\})$ heißt gebrochenrationale Funktion.

$$f \text{ heißt } \begin{cases} \text{echt gebrochen} & \text{falls} \quad m < n \\ \text{unecht gebrochen} & \text{falls} \quad m \geq n \end{cases}$$

Diskussion:

- Wir nehmen o.B.d.A. an, dass Zähler und Nennerpolynom keine gemeinsamen Nullstellen besitzen (ansonsten: Kürzen gemeinsamer Faktoren in Zähler u. Nummer)

- Die Nullstellen des Nennerpolynoms heißen Polstellen der gebrochenen rationalen Funktion (x_p ... Polstellen, dann $\lim_{x \to x_p} |f(x)| = \infty$)

- Die Nullstellen des Zählerpolynoms sind die Nullstellen von $f(x)$

- Verhalten von $f(x)$ bei k-facher Nullstelle oder Polstelle
Vorzeichenwechsel $\Leftrightarrow k$ ungerade

- Polynomdivision $p(x) : q(x) = \underbrace{a(x)}_{\text{Polynom}} + \underbrace{\frac{r(x)}{q(x)}}_{\text{echt gebrochenen}}$
$y = a(x)$ ist die sogenannte Asymptote.

Beispiel 3: $y = \frac{x^3 + 2^2}{x^2 - x - 2} = \frac{x^2(x+2)}{(x+1)(x-2)} = x + 3 + \frac{5x+6}{x^2-x-2}$
$\curvearrowright$

- Nullstellen :$x = 0$(2-fach), $x = -2$

- Polstellen: $x = -1, x = 2$ (einfach $\to$ Vorzeichenwechsel)

- Asymptote $y = x + 3$
  Schnittstellen und Asymptote: $5x + 6 = 0 \curvearrowright x = -1,2$

$\curvearrowright$Vereinfachte Kurvendiskussion (ohne Extremstellen, Wendestellen)

Trigonometrische Funktionen Übliche Definitionen der trigonometrischen Funktionen.

Definition 3 Eine Funktion $y = f(x)$ heißt periodisch, wenn es eine Zahl $p > 0$ gibt mit $f(x) = f(x+p)$ (für alle $x \in Db(f)$). Die kleinste positive Zahl p mit dieser Eigenschaft heißt Periode von f.

Definition 4 Eine Funktion $y = f(x)$ heißt

1. gerade, wenn $f(-x) = f(x) \quad \forall x \in Db(f)$
2. ungerade, wenn $f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in Db(f)$

Diskussion

$y = f(x)$	$Db(f)$	Periode	Symmetrie
$y = \sin x$	$\mathbb{R}$	2π	ungerade
$y = \cos x$	$\mathbb{R}$	2π	gerade
$y = \tan x$	$\mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$	π	ungerade
$y = \cot x$	$\mathbb{R}\backslash\{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$	π	ungerade

Einige wichtige Formeln

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad , \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \cot x = \frac{1}{\tan x}$
$\sin 2x = 2 \sin x \cos x,\ \cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$

Exponentialfunktionen

$$y = f(x) = a^x \ (a > 0,\ x \in \mathbb{R}$$

- Wichtig: Potenzgesetze, z.B. $a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1+x_2}$usw.
- Besondere Bedeutung besitzt die Funktion $y = e^x$ $(x \in \mathbb{R})$ mit $e = \lim\limits_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n = 2,7182...$

Hyperbelfunktionen

Definition 5 hyperbolicus

$$\begin{aligned}
y = \cosh x &:= \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})\ , x \in \mathbb{R} \\
y = \sinh x &:= \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})\ , x \in \mathbb{R} \\
y = \tanh x &:= \frac{\sinh x}{\cosh x}\ , x \in \mathbb{R} \\
y = \coth x &:= \frac{1}{\tanh x}\ , x \neq 0
\end{aligned}$$

1.4.2 Umkehrfunktionen

- Zur Erinnerung: $y = f(x),\ x \in Db(f)$ heißt injektiv (umkehrbar eindeutig), wenn es zu jedem Bild $y \in Wb(f)$ genau ein Urbild $x \in Db(f)$ mit $y = f(x)$ gibt, d.h.:

$$\underbrace{y}_{\in Wb(f)} \longrightarrow \underbrace{x}_{\in Db(f)} =: f^{-1}(y)$$

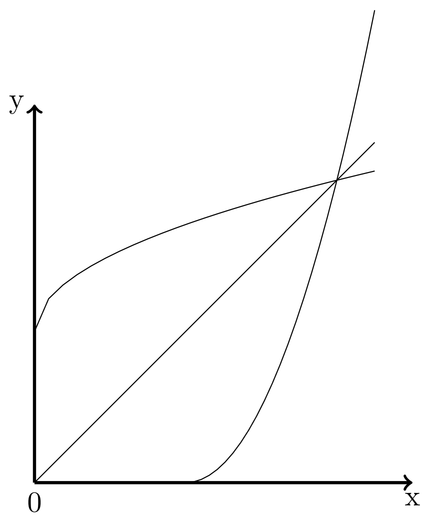
  Die dadurch erklärte Funktion $f^{-1}|Wb(f) \to Db(f)$ heißt Umkehrfunktion f^{-1} („f oben -1 “) von f.
  Es gilt: $Db(f^{-1}) = Wb(f),\ Wb(f^{-1}) = Db(f)$

- Bilden der Umkehrfunktion zu $y = f(x)$, $x \in Db(f)$
  1. Auflösen der Funktionsgleichung $y = f(x)$ nach $x : x =: f^{-1}(y)$ (falls dies eindeutig möglich ist, anderfalls existiert $^{-1}$ nicht!)
  2. Oft erfolgt noch eine Vertauschung von x und y
     $y = f^{-1}(x),\ x \in Db(f^{-1}) = Wb(f)$

  Vertauschung entspricht geometrisch einer Spiegelung an der Geraden $y = x$, vgl. Beispiel 4.

Beispiel 4: $y = f(x) = \sqrt{x} + 2$, $x \in [0; \infty)$

1. Auflösung nach $x : y = \sqrt{x} + 2 \Rightarrow \sqrt{x} = y - 2 \Rightarrow x = (y-2)^2 =: f^{-1}(y)$
   $Db(f^{-1}) = Wb(f) = [2; \infty)$
2. Vertauschung von x und y: $y = f^{-1}(x) = (x-2)^2, Db(f^{-1}) = [2; \infty)$



!$Db(f^{-1})$ ist nur $[2; \infty)$ obwohl $(x-2)^2$ für alle $x \in \mathbb{R}$ erklärt ist.

Defnition 6 Die reellwertige Funktion $y = f(x)$ heißt

1. streng monoton wachsend, falls $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
2. monoton wachsend (=nicht fallend), falls $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

für alle $x_1, x_2 \in Db(f)$ gilt.
Analog: streng monoton falled bzw. monoton fallend (=nicht wachsend)

Satz 2 f streng monoton $\Rightarrow f$ injektiv, (d.h. f^{-1} existiert)

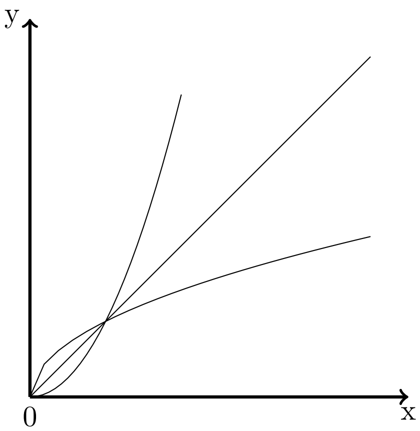
1.4.3 Elementare Funktionen (Teil 2)

Wurzel- und Logarithmusfunktionen

Definition 7

$$y = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}\, (x \geq 0; n \in \mathbb{N}^*)$$

ist die Umkehrfunktion zu $y = x^n$ $(x \geq 0, n \in \mathbb{N}^*)$



Diskussion:

1. Im Bereich der reellen Zahlen ist $\sqrt[n]{x}$ nur für $x \geq 0$ erklärt, der Funktionswert selbst ist nicht negativ.
2. Lässt man in $x^{\frac{1}{n}}$ negative x zu, (z.B. $\sqrt[3]{-8} = -2$), so ergeben sich Widersprüche: $\sqrt[3]{-8} = -2 \Rightarrow -2 = (-8)^{\frac{1}{3}} = (-8)^{\frac{2}{6}} = ((-8)^2)^{\frac{1}{6}} = 64^{\frac{1}{6}} = 2$
(die Lösungs der Gleichung $x^3 = -8$ ist natürlich $x = -2$)

Definition 8

$$y = \log_a x \; (a > 0, a \neq 1, x > 0)$$

ist die Umkehrfunktion zu $y = a^x$ $(x \in \mathbb{R})$
speziell: $\lg x := \log_{10} x$, $\ln x := \log_e x$
Achtung bei TR: (manchmal log=ln, auch log=lg)
Diskussion:

1. Log Gesetze (Basis beliebig):
   $\log xy = \log x + \log y$
   $\log \frac{x}{y} = \log x - \log y$
   $\log x^a = a \log x$

2. Es gilt $a^x = e^{x \ln a}$ $(= (\underbrace{e^{\ln a}}_{a})^x)$

Arcusfunktionen Vorbetrachtung: $y = f(x) = \sin x$ ist nicht injektiv, also ex. keine Umkehrfunktion.
Aber $y = \sin x$ für $x \in [-2\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ ist injektiv, also umkehrbar.

Definition 9 Umkehrfunktion der trigonometrischen Funktionen

	Db	Wb	Umkehrfunktion von
$y = \arcsin x$	$[-1; 1]$	$[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$	$y = \sin x, -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$
$y = \arccos x$	$[-1; 1]$	$[0; \pi]$	$y = \cos x, 0 \leq x \leq \pi$
$y = \arctan x$	$\mathbb{R}$	$(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$	$y = \tan x, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$
$y = \operatorname{arccot} x$	$\mathbb{R}$	$(0; \pi)$	$y = \cot x, 0 < x < \pi$

Beispiel 5 Gesucht sind alle Lösungen der Gleichung $\tan 2x = y$. Es sei $2x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi) \curvearrowright y = \tan 2x = \tan 2x - k\pi$ mit $2x - k\pi \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$
$\curvearrowright 2x - k\pi = \arctan y \curvearrowright \underline{\underline{x = \frac{1}{2}(k\pi + \arctan y), k \in \mathbb{Z}}}$

Areafunktionen

Definition 10 Umkehrfunktionen der Hyperbelfunktionen

area	Db	Wb	Umkehrfunktion von
$y = \operatorname{arsinh} x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$y = \sinh x, x \in \mathbb{R}$
$y = \operatorname{arcosh} x$	$[1; \infty)$	$[0; \infty)$	$y = \cosh x, x \geq 0$
$y = \operatorname{arctanh} x$	$(-1; 1)$	$\mathbb{R}$	$y = \tanh x, x \in \mathbb{R}$
$y = \operatorname{arcoth} x$	$\mathbb{R}\backslash[-1; 1]$	$\mathbb{R}\backslash\{0\}$	$y = \coth x, x \neq 0$

Aus der Definition 9 der Hyperbelfunktion folgt:

$\operatorname{arsinh} x = \ln (x + \sqrt{x^2 + 1})$	$\operatorname{artanh} x = \frac{1}{2} \ln (\frac{1+x}{1-x})$
$\operatorname{arcosh} x = \ln (x + \sqrt{x^2 - 1})$	$\operatorname{arcoth} x = \frac{1}{2} \ln (\frac{x+1}{x-1})$

1.5 Lineare Algebra

1.5.1 Vektorräume

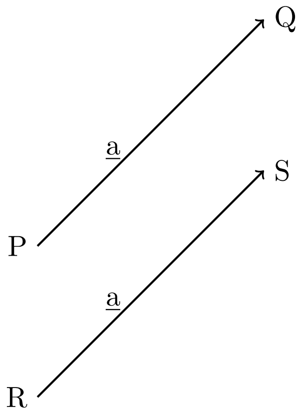
Begriff:

1. Gegeben seinen ein Körper $(K, +, \cdot)$, dessen Elemente Skalare heißen (meist $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ und eine Abelsche Gruppe $(V, \oplus)$ ($V \ldots$ Menge, Elemente heißen Vektoren, $\oplus$ $\ldots$ sogenannte Vektoraddition)

2. Es gibt eine Abbildung $\odot$ von $K \times V$ in V, die jedem $x \in V$ und jedem $\lambda \in K$ ein Element $\lambda \odot x \in V$ zuordnet (die sogenannte Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar) mit folgenden Eigenschaften:
   - Distributivgesetze: $(\lambda + \mu) \odot x = (\lambda \odot x) + (\mu \odot x)$
     $\lambda \odot (x \oplus y) = (\lambda \odot x) \oplus (\lambda \oplus y)$
   - Assoziativgesetz: $(\lambda \cdot \mu) \odot x = \lambda \odot (\mu \odot x)$
   - $1 \odot x = x$

Eine Menge V mit dem in (1) und (2) aufgeführten Operationen $\oplus$ und $\odot$ heißt Vektorraum (VR) über K. Bemerkung Schreibweise meist $\begin{cases} + & \text{anstelle von} \quad \oplus \\ \cdot & \text{anstelle von} \quad \odot \end{cases}$

Beispiel 1 Skalarbereich $K = \mathbb{R}$
Vektoren: Größen, die durch eine Zahlengröße (z.B. Länge) und eine Richtung charakterisiert sind (Z.B. Kräfte, Geschwindigkeiten, Translationen)



Pfeile als Repräsentation eines Vektors $\underline{a}$, Bezeichnung $\underline{a} = \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$ auch $\vec{a}$
Ortsvektoren: Angeheftet an einem gemeinsamen Anfangspunkt 0 (Ursprung)

- Vektoraddition $\vec{a} + \vec{b}$
- Multiplikation mit einem Skalar $\lambda \cdot \vec{a}$
  $\lambda > 0 \ldots$ gleiche Richtung
  $\lambda < 0 \ldots$ entgegengesetze Richtung
  Länge: $|\lambda|$ -fache der Länge von $\vec{a}$
- Subtraktion $\vec{a} - \vec{b}$ $(:= \vec{a} + (-\vec{b}))$
- Nullvektor $\vec{O}$ (Länge 0, keine Richtung)

Beispiel 2 $K = \mathbb{R}, V = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} | x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$ (Menge der sogenannten Spaltenvektoren)

- Vektoraddition: $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$
- Multiplikation $\lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \vdots \\ \lambda \cdot x_n \end{pmatrix}$

Definition 1 Die Vektoren $\vec{a}_1, \dots \vec{a}_n$ heißen linear unabhängig, wenn die Gleichung

$$x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \cdots + x_n\vec{a}_n = 0 \tag{10}$$

nur die triviale Lösung $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ besitzt.

Diskussion:

1. $x_1\vec{a}_1 + \cdots + x_n\vec{a}_n$ heißt eine Linearkombination (LK) der Vektoren $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$
2. Falls es eine LK der Gestalt (10) gibt, in der nicht alle x_i gleich 0 sind, so heißen $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ linear abhängig.
   In diesem Falle lässt sich (wenigstens) einer der Vektoren als LK der anderen darstellen.

Definition 2 Es sei $V_1 \subseteq V$ eine nichtleere Teilmenge von V. Wir bezeichnen mit $L(V_1)$ die Menge aller LK von jeweils endlich vielen Vektoren aus V_1.
$L(V_1)$ heißt lineare Hülle von V_1

Bemerkung: $L(V_1)$ ist selbst ein VR, der von V_1 aufgespannte Teilraum von V.

Definition 3

- Ein VR V heißt n-dimensional, wenn es n unabhängige Vektoren $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ gibt, die den gesamten Raum aufspannen: $V = L(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$
- Die Menge der Vektoren $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ nennt man in diesem Falle eine Basis von V.

Diskussion: In jedem VR gibt es unterschiedliche Basen, jedoch ist die Anzahl der Vektoren, die eine Basis bilden stets gleich (Dimension von VR).

Satz 1 Es sei $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ eine Basis eines VR V. Dann gibt es für jedes $x \in V$ eine eindeutige Darstellung der Gestalt $x = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \cdots + x_n\vec{a}_n$.

Bemerkung: Die Koeffizienten $x_1, \ldots, x_n$ heißen Koordinaten von $\vec{x}$ bezüglich der Basis $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$.
Die Summanden $x_1\vec{a}_1, \ldots, x_n\vec{a}_n$ heißen Komponenten von $\vec{x}$ bezüglich der Basis $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$.

Bespiel 3 (vlg. Beispiel 2) Nullvektor im Raum der Spaltenvektoren: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

Der Raum selbst heißt $\mathbb{R}^n$

Die Vektoren $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \vec{e}_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ des Raumes $\mathbb{R}^n$ bilden offensichtlich eine Basis von $\mathbb{R}^n$

Beispiel 4 Zwei Vektoren $\vec{a}_1 \neq 0$ und $\vec{a}_2 \neq 0$ in einer Ebene bilden genau dann eine Basis, wenn sie nicht parallel sind.

1.5.2 Matrizen

Definition 4 Ein aus $m \cdot n$ Zahlen $a_{ij} \in \mathbb{R}$, welche in m Zeilen und n Spalten angeordnet sind, bestehendes Schema heißt Matrix vom Typ (m, n).

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij}), \quad \underbrace{i}_{Zeilenindex} = 1, ..., m \quad \underbrace{j}_{Spaltenindex} = 1, ..., n$$

Rechenoperationen

Definition 5 $\underline{A} = (a_{ij})$, $\underline{B} = (b_{ij})$ seinen vom gleichen Typ (m, n).

1. $\underline{A} + \underline{B} := (a_{ij} + b_{ij}) \quad i = 1, ..., m \; j = 1, ..., n$ ... Matr.-Addition
2. Es sei $\lambda \in \mathbb{R}$, $\underline{A} = (a_{ij}) \quad i = 1, ..., m \; j = 1, ..., n$
   $\lambda \cdot \underline{A} := (\lambda a_{ij}) \quad i = 1, ..., m \; j = 1, ..., n$
3. $\underline{A} = (a_{ij})$ sei vom Typ (m, n)
   $\underline{B} = (b_{jk})$ sei vom Typ (n, p)
   $\underline{A}$ und $\underline{B}$ heißen in dieser Reihenfolge verkettet. (Spaltenzahl von $\underline{A}$ = Zeilenzahl von $\underline{B}$). Dann:
   $\underline{A} \cdot \underline{B} = (\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}) \quad i = 1, ..., m \; k = 1, ..., p$ (Matr.-Multiplikation)
   Das Produkt ist also vom Typ (m, p)

Diskussion: Zweckmäßig FALK-Schema für die Matr.-Multiplikation (vgl. Beispiel 5).

Definition 6 Die aus der (m,n)-Matrix $\underline{A}$ durch Vertauschen von Zeilen und Spalten entstehende (n,m)-Matrix heißt die Transponierte von $\underline{A}$.
Bezeichnung $\underline{A}^T$

Beispiel 5: $\underline{A} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \underline{B} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \underline{C} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

1. $\underline{A} + \underline{B}$ existiert nicht (unterschiedlicher Typ)
2. $\underline{A} + \underline{C} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$
3. $2 \cdot \underline{A} = \begin{pmatrix} 10 & -6 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$
4. $\underline{B}^T = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 6 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$
5. $\underbrace{\underbrace{\underline{B}}_{(2,3)} \cdot \underbrace{\underline{A}}_{(2,2)}}_{3 \neq 2 \curvearrowright \text{ nicht verkettet}}$ existiert nicht
6. $\underline{A} \cdot \underline{B}$ FALK-Schema

Bemerkung: Matrizen-Multiplikation ist im allgemeinen nicht kommutativ!
Diskussion (Ausgewählte Rechenregeln)

1. Die Menge der Matrizen vom gleichen Typ bildet mit den Operationen (1) und (2) aus Definition 5 einen VR (Vektorraum).
2. Falls die entsprechenden Typ-Vorraussetzungen erfüllt sind, gelten:
   - $(\underline{AB})\underline{C} = \underline{A}(\underline{BC})$ (Assoziativgesetz)
   - $\underline{A}(\underline{B} + \underline{C}) = \underline{AB} + \underline{AC}$
     $(\underline{A} + \underline{B})\underline{C} = \underline{AC} + \underline{BC}$ (Distributivgesetze)
   - $(\lambda \underline{A})^T = \lambda \cdot \underline{A}^T$, $(\underline{A}^T)^T = \underline{A}$
   - $(\underline{A} + \underline{B})^T = \underline{A}^T + \underline{B}^T$, $(\underline{AB})^T = \underline{B}^T \underline{A}^T$
3. Achtung: Im allg. gilt $\underline{AB} \neq \underline{BA}$
4. FALK-Schema bei fortgesetzter Multiplikation $\underline{ABC}$:

$$\begin{array}{c|c|c} & \underline{B} & \underline{C} \\ \hline \underline{A} & \underline{AB} & (\underline{AB})\underline{C} \end{array} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{c|c} & \underline{C} \\ \hline \underline{B} & \underline{BC} \\ \hline \underline{A} & \underline{A}(\underline{BC}) \end{array}$$

Spezielle Matrizen:

1. Quadratische Matrizen: Typ (n, n)
   Eine quadratische Matrix $\underline{A}$ heißt
   a) symmetrisch, wenn $\underline{A}^T = \underline{A}$ gilt
   b) obere/untere Dreiecksmatrix, wenn $a_{ij} = 0$ für $\begin{cases} i > j \\ i < j \end{cases}$
   c) Diagonalmatrix, wenn $a_{ij} = 0$ für $i/neqj$
   d) Einheitsmatrix $underlineE$, wenn $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad i = j \\ 0 & \text{für} \quad i \neq j \end{cases}$
      (spezielle Diagonalmatrix, oft auch mit $\underline{I}$ bezeichnet)
2. Nullmatrix $\underline{0}$ (saämtliche Elemente $= 0$; nicht notwendig quadratisch)
3. Matrizen vom Typ $(n, 1)$ (n Zeilen, 1 Spalte) heißen (Spalten-)Vektoren
   $\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, vgl. 1.5.1
   Es ist dann $\underline{a}^T = (a_1|a_2|...|a_n)$ vom Typ $(1, n)$ (Zeilenvektor)

Diskussion:

1. Die quadratischen Matrizen vom Typ (n, n) bilden mit den Operationen Matr-Add. und Matr.-Multipl. einen nicht-kommutativen Ring.
2. Für quadratische Matrizen $/underlineA$ sind Potenzen bildbar:
   $$\underline{A}^0 := \underline{E},\ \underline{A}^n = \underbrace{\underline{A} \cdot \underline{A} \cdot ... \cdot \underline{A}}_{n \text{ Faktoren}},\ n \in \mathbb{N}^*$$
3. Falls die entsprechenden Typ-Vorraussetzungen erfüllst sind, gelten:
   $\begin{array}{c|c|c} \underline{A} \cdot \underline{E} = \underline{A} & \underline{0} \cdot \underline{A} = \underline{0} & \underline{A} + \underline{0} = \underline{A} \\ \underline{E} \cdot \underline{A} = \underline{A} & \underline{A} \cdot \underline{0} = \underline{0} & \end{array}$
   (analog 0 bzw. 1 bei reelllen Zahlen)
4. Es sei $\underline{A}$ vom Typ (m, n), $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$, d.h. vom Typ $(n, 1)$
   Dann ist $\underline{y} = \underbrace{\underline{A}}_{(m,n)} \underbrace{\underline{x}}_{(n,1)}$ vom Typ $(m, 1)$, also $\underline{y} \in \mathbb{R}^m$
   Durch die Zuordnung $\underline{x} \mapsto \underline{A}\,\underline{x}$ wird eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$ beschrieben. (Eine Abb. f heißt linear, wenn $f(x + y) = f(x) + f(y)$, $f(a \cdot x) = a \cdot f(x)$ $(\forall x, y \in Db(f), \forall a \in \mathbb{R})$ gilt.)

$\underline{y} = \underbrace{\underline{A}}_{(m,n)} \underbrace{\underline{x}}_{(n,1)}$ ausführlich mit Falk-Schema:

d.h. $\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = y_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = y_m \end{pmatrix} \Leftrightarrow \underline{A}\,\underline{x} = \underline{y} \implies$ Matrix-Schreibweise für ein lineares Gleichungssystem

1.5.3 Determinanten

Definition 7 Jeder n-reihigen quadratischen Matrix $\underline{A}$ ist eindeutig eine Zahl $\det \underline{A}$, die sogenannte Determinante von $/underline A$, wie folgt zugeordnet:
$n = 1 : \det(a_{11} := a_{11}$

$$n \geq 2 : \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} := a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + ... + a_{1n}A_{1n}$$

Dabei ist $A_{ij} = (-1)^{i+j} \det \underline{U}_{ij}$ die Adjunkte des Elements a_{ij}
$\underline{U}_{ij} \dots (n-1)$-reihige (Unter-)Matrix, die durch Streichen der i-ten Zeile und der j-ten Spalte von $\underline{A}$ entsteht.

Bezeichnung: $\det \underline{A} = \det () \underbrace{=}_{n \geq 2} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$

Satz 2

1. $\det(\underline{A} \cdot \underline{B}) = \det \underline{A} \cdot \det \underline{B}$
2. $\det(\underline{A}^T) = \det \underline{A}$

Wegen Satz 2 2 gelten alle im folgenden für die Zeilen formulierten Eigenschaften sinngemäß auch für die Spalten.

Satz 3 Eigenschaften der Determinanten

1. $\underline{B}$ gehe aus $\underline{A}$ durch Vertauschen zweier Zahlen hervor. Dann gilt $\det \underline{B} = -\det \underline{A}$
2. Es gilt $\det \underline{A} = 0$, falls zwei Zeilen elementweise proportional sind, bzw. falls alle Elemente einer Zeile gleich 0 sind.
3. Es gilt: $\rightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda \cdot a_{i1} & \dots & \lambda \cdot a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$
4. Der Wert einer Determinante ändert sich nicht, wenn das λ-fache einer Zeile elementweise zu einer anderen Zeile addiert wird.
5. $\det \underline{A} = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$ (Entwicklung nach i-ter Zeile, $i = 1, ..., n$)
   $\det \underline{A} = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$ (Entwicklung nach j-ter Spalte, $j = 1, ..., n$)
   (Entwicklungssatz)

Beispiel 7 Prinzip: Nullen erzeugen mit (4), Entwicklungssatz (5) anwenden.

Anwendungen

1. Vektorrechnung in $\mathbb{R}^3$, vgl. Abschnitt 1.5.5.

2. Gegebenes lineares Gleichungssystem (n Gleichungen, n Unbekannte)

   Matrix-Form $\underline{A}\,\underline{x} = \underline{b}$ mit $\underline{A} = (a_{ij})$, $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

   $\underline{A}\,\underline{x} = \underline{b}$ besitzt genau dann eine Lösung eindeutige Lösung $\underline{x}$, wenn $\det \underline{A} \neq 0$.
   In diesem Falle gilt $x_j = \frac{\det \underline{B}_j}{\det \underline{A}}$ $(j = 1, ..., n)$, wobei $\underline{B}_j$ aus $\underline{A}$ hervorgeht, indem die j-Spalte von $\underline{A}$ durch $\underline{b}$ ersetzt wird. (CRAMERsche Regel, theoretische Bedeutung, praktisches Vorgehen vgl. folgenden Abschnitt 1.5.4)

1.5.4 Lineare Gleichungssysteme, Rang einer Matrix, Inverse

Das Austauschverfahren Gegeben: System von m linearen Funktionen mit den unabhängigen Variablen $x_1, ..., x_n$ und den abhängigen Variablen $y_1, ..., y_m$:

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n + a_{10} \\ &\vdots \\ y_m &= a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n + a_{m0} \end{aligned}$$

Beispiel 8 Betrieb, m Abteilungen, n Produkte $P_1, ..., P_n$
a_{ij} ... Kosten pro Einheit von P_j die in Abteilung i entstehen
a_{i0} ... Fixkosten in Abteilung i
x_j ... produzierte Menge von P_j
y_i ... Gesamtkosten in Abteilung i

Matrix Schreibweise $\underline{y} = \underline{A}\,\underline{x} + \underline{a}$ mit $\underline{A} = (a_{ij})$, $\underline{a} = \begin{pmatrix} a_{10} \\ \vdots \\ a_{m0} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$

Tabellenform:

	x_1	...	x_n	1
y_1	a_{11}	...	a_{1n}	a_{10}
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
y_m	a_{m1}	...	a_{mn}	a_{m0}

kurz

	$\underline{x}^T$	1
$\underline{y}$	$\underline{A}$	$\underline{a}$

(T1)

Aufgaben:

1. $\underline{x}$ vorgegeben, $\underline{y}$ ist zu berechnen (klar)

2. $\underline{y}$ vorgegeben, $\underline{x}$ ist zu berechnen (nicht immer lösbar, falls lösbar, nicht immer eindeutig lösbar)

Lösungsprinzip: Man tausche so oft wie möglich y_r gegen x_s aus = Austauschschritt AS ($y_r \leftrightarrow x_s$) Austauschverfahren

AS $y_r \leftrightarrow x_s$ bedeutet

1. r-te Zeile $y_r = \dots$ auflösen nach $x_s \curvearrowright x_s = \dots$
2. in allen anderen Zeilen x_s durch die rechte Seite von $x_s \curvearrowright x_s = \dots$ ersetzen $\curvearrowright$ neue Tabelle T2

Die Koeffizienten a_{ij}^* in der neuen Tabelle, entstehen aus den alten Koeffizienten a_{ij} wie folgt:

Austauschregeln

Abkürzungen: $p := a_{rs}$ (Pivot)
PZ … Pivotzeile (Zeile r)
PS … Pivotstpalte (Spalte s)

1. $a_{rs}^* = \frac{1}{p}$
2. $a_{rj}^* = \frac{a_{rj}}{(-p)}$ $(j \neq s)$
   „neue PZ = alte PZ / (-Pivot)“
3. $a_{is}^* = \frac{a_{is}}{p}$ $(i \neq r)$ d.h.
   „neue PS = alte PS /Pivot“
4. $a_{ij}^* = a_{ij} + a_{is} \cdot a_{rj}^*$ $(i \neq r, j \neq s)$

Praktisches Vorgehen

1. Pivot kennzeichnen
2. Austauschregeln AR1 - AR4 abarbeiten.
   Dabei für AR3 unter alter Tabelle die neue PZ als Kellerzeile schreiben.

$$\begin{pmatrix} & & \text{Spalte } j & \dots & \text{Spalte } s & \\ & & \vdots & & \vdots & \\ \text{Zeile } i & \dots & a_{ij} & \dots & a_{is} & \dots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ \text{Kellerzeile } K & \dots & a_{rj}^* & \dots & * & \dots \end{pmatrix}$$

$a_{ij}^* = a_{ij} + a_{is} \cdot a_{rj}^*$

Varianten des Austauschverfahrens (AV)

1. AVZ … AV mit Zeilentilgung, d.h. neue PZ in neuer Tabelle weglassen
2. AVS … AV mit Spaltentilgung,d.h. in neuer Tabelle neue PS weglassen
   (nur anwendbar, wenn Variable über der wegzulassenden Spalte = 0 ist, vgl. 1.5.4 Lineare Gleichungssysteme)
3. AVSZ … AVS + AVZ gleichzeitig

Lineare Gleichungssysteme

- Gegeben sei das lineare Gleichungssystem (in Gleichungen mit n Unbekannten $x_1, ..., x_n$)

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{11}$$

- Gleichungssystem (11) heißt homogen, falls $b_1 = b_2 = ... = b_m = 0$, sonst inhomogen
- Matrixform $\underline{A}\,\underline{x} = \underline{b} \Leftrightarrow \underline{A}\,\underline{x} - \underline{b} = 0$
- Äquivalente Form:

$$\underline{y} = \underline{A}\,\underline{x} - \underline{b} \text{ mit } \underline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \underline{0} \tag{12}$$

Hilfsgrößen $y_1 = ... = y_m = 0$

- Tabellenform: $\begin{array}{c|cc} & \underline{x}^T & 1 \\ \hline \underline{y} & \underline{A} & -\underline{b} \end{array}$
- Lösungsprinzip: AVS
  - Fall 1: Alle y, sind austauschbar $\Rightarrow$ (11) ist lösbar, Lösung ist aus letzter Tabelle (TE) ablesbar. $\begin{array}{c|cc} \text{TE} & x_3 & 1 \\ \hline x_1 & 0 & 4 \\ x_2 & 2 & \text{-3} \end{array}$ $x_1 = 4$ $x_2 = 2x_3 - 3(x_3 \in \mathbb{R}$, frei wählbar)
  - Fall 2: Wenigstens ein y_i ist gegen kein x_j austauschbar

$$\begin{array}{c|ccccc} & \text{eventuell noch nicht ausgetauschte } x_j & & & & 1 \\ \hline \vdots & & & & & \\ y_i & 0 & \dots & 0 & 0 & \alpha \\ \vdots & & & & & \end{array} \curvearrowright y_i = \alpha$$

  - Fall 2a: $\alpha = 0$ Zeile y, kann gestrichen werden $(0 = 0)$
  - Fall 2b $\alpha \neq 0 \curvearrowright$ Gleichungssystem (11) nicht lösbar (Widerspruch da $y_i = 0$)

Diskussion: Verfahren endet also entweder im Fall 2b (unlösbar) oder in Tabelle in der kein y_i mehr vorkommt (Fall 1 bzw. 2a):

$$\begin{array}{c|ccccc} TE & x_{s1} & x_{s2} & \dots & x_{sq} & 1 \\ \hline x_{r1} & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ x_{rp} & & & & & \end{array}$$

(Darstellung 2)

- $x_{r1}, ..., x_{rp}$ (ausgetausche x_j) ... Basisvariable (BV)
  $x_{s1}, ..., x_{sq}$ (nicht ausgetauschte x_j) ... Nichtbasisvariable (NBV)
  $(p + q = n)$

- Allgemeine Lösung ergibt sich aus Endtabelle:
  NBV frei wählbar (Parameter $\in \mathbb{R}$
  BV daraus berechenbar

- Falls keine NBV vorhanden $\curvearrowright$ Lösung eindeutig

Definition 8 Die Darstellung (2) heißt Basisdarstellung des lineare Gleichungssystems (11)

Diskussion: Aus einer Basisdarstellung (2) lassen sich weitere gewinnen durch Austausch $\underbrace{x_{ri}}_{BV} \leftrightarrow \underbrace{x_{sj}}_{NBV}$

Beispiel 9 $3x_1 + x_2 + 2x_3 = -2$
$-5x_1 - 3x_2 - 2x_3 = -2$
$x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 10$

$T1$	x_1	x_2	x_3	1
$y_1 = 0$	3	1	2	2
$y_2 = 0$	-5	-3	-2	2
$y_3 = 0$	1	3	-2	-10
K	-3	$*$	-2	-2

$T2$	x_1	x_3	1
x_2	-3	-2	-2
0	4	4	8
0	-8	-8	-16
K	$*$	-1	-2

$T3$	x_3	1
x_2	1	4
x_1	-1	-2
0	0	0

(Fall 2a: $0 = 0$)

T3 ist Endtabelle (BV x_1, x_2, NBV: x_3)
allg. Lösung: $x_2 = x_3 + 4\,x_1 = -x_3 - 2\,x_3 \in \mathbb{R}$ (frei wählbar)
andere Form mit Parameter $x_3 = t$:

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} -t-2 \\ t+4 \\ t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

Bemerkungen:

1. Bei homogenen Systemen $\underline{A}\,\underline{x} = \underline{0}$ muss die 1-Spalte nicht geschrieben werden, nur „gedacht“

2. Die Methode AVS entspricht dem sogenannten Gauss-Jordan-Verfahren

Der Gausssche Algorithmus (siehe Beispiel 10)

- AVSZ (Spalten und Zeilentilgung)
- weggelassen Zeilen merken (Kellerzeilen)
- Rückrechnung

Beispiel 10 $-x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4$
$2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 4$
$2x_1 + x_2 - 4x_3 = -3$

T_1	x_1	x_2	x_3	1
0	-1	2	2	-4
0	2	5	2	-4
0	2	1	-4	3
x_2	-2	$*$	4	-3

T_2	x_1	x_3	1
0	-5	10	-10
0	-8	22	-19
x_1	$*$	2	-2

T_3	x_3	1
0	6	-3
x_3	$*$	$\frac{1}{2}$

ENDE AVSZ

Rückrechnung: $T3 \curvearrowright x_3 = \frac{1}{2}$
$T2 \curvearrowright x_1 = 2x_3 - 2 = \underline{\underline{-1}}$
$T1 \curvearrowright x_2 = -2x_1 + 4x_3 - 3 = \underline{\underline{1}}$
Lösung: $\underline{\underline{\underline{x} = (-1|1|\frac{1}{2})^T}}$
Bemerkung: m Gleichungen, n Unbekannte
$m < n \curvearrowright$ AVS günstiger
$m \geq n \curvearrowright$ GAUSS oder AVS

Weitere Anwendungen des AV

1. Lineare Unabhängigkeit von Vektoren $\underline{a}_1, ..., \underline{a}_n \in \mathbb{R}^m$ überprüfen.
   Ansatz: $x_1 a_1 + x_2 a_2 + ... + x_n \underline{a_n} = \underline{0} \leftrightarrow \underline{Ax} = \underline{0}$
   mit $\underline{A} = (\underline{a}_1 | \underline{a}_2 | ... | \underline{a}_n)$
   (homogens System, AVS mit Starttabelle $\begin{array}{c|c} & \underline{x}^T \\ \hline \underline{0} & \underline{A} \end{array}$)
   - Unabhängigkeit genau dann, wenn alle x_i ausgetauscht werden können
   - Die zu den ausgetauschten x_i (d.h. den Basisvariablen AV) gehörenden $\underline{a}_i$ sind unabhängig. Sie bilden eine Basis zu $L(\underline{a}_1, ..., \underline{a}_n)$
2. Rang einer Matrix $\underline{A} = (a_1 | a_2 | ... | a_n)$...rang $(\underline{A})$
   Definition rang $(\underline{A}) = \dim L(a_1, ..., a_n)$
   Dimension des von den Spaltenvektoren aufgespannten Teilraumes (von $\mathbb{R}^m$)
   Berechnung: rang $(\underline{A})$ = Anzahl der ausführbaren Austauschschritte in AVSZ mit Starttabelle $\begin{array}{c|c} & \underline{x}^T \\ \hline \underline{y} & \underline{A} \end{array}$

3. Berechnung der Determinante einer (n, n) -Matrix
   vgl. Merkblatt LAG

Die Inverse einer (n, n) -Matrix

Definition 9 Es sei $\underline{A}$ vom Typ (n, n). Das Gleichungssystem $\underline{y} = \underline{A}\,\underline{x}$ sei für jedes $\underline{y}$ eindeutig nach $\underline{x}$ auflösbar, d.h. $\underline{x} = \underline{B}\,\underline{y}$. Dann heißt die (n, n)-Matrix $\underline{B}$ Inverse zu $\underline{A}$.
Bezeichnung: $\underline{A}^{-1} := \underline{B}$
Falls $\underline{A}^{-1}$ existiert, so heißt $\underline{A}$ regulär, sonst singulär.

Bemerkungen:

1. $\underline{A}$ ist regulär $\leftrightarrow \det \underline{A} \neq 0$
2. $\underline{A}$ regulär, dann hat $\underline{A}\,\underline{x} = \underline{b}$ die Lösung $\underline{x} = \underline{A}^{-1}\underline{b}$

Rechenregeln: A und B seien regulär. Dann gelten $AA^{-1} = E, A^{-1}A = E, (A^{-1})^{-1} = A$
$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}, \quad (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Bemerkung: Die Menge der regulären Matrizen vom Typ (n, n) beildet mit der Operation „Matrizen-Multiplikation“ eine (nicht ABELsche) Gruppe mit neutralem Element $\underline{E}$.

Verfahren zur Ermittlung der Inversen

- vollständiges AV mit Starttabelle $\begin{array}{c|c} T_1 & \underline{x}^T \\ \hline \underline{y} & \underline{A} \end{array}$
  Fall 1: alle x_j sind austauschbar $\curvearrowright \underline{A}$ regulär[2]
- Probemöglichkeit $\underline{A}\,\underline{A}^{-1} = \underline{E}$

Beispiel 11:

1.5.5 Vektorrechnung im $\mathbb{R}^3$

Kartesische Basis Einige Begriffe:

1. Betrag eines Vektors $\vec{a}$: Länge des Pfeils, der $\vec{a}$ repräsentiert. Bezeichnung $|\vec{a}|$
2. Einheitsvektor: Vektor mit $|\vec{a}| = 1$
3. Zu $\vec{a} \neq \vec{0}$ gehörender Einheitsvektor $\vec{a}^0 := \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}$
4. Kartesische Basis $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$
   - $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ besitzen Betrag 1
   - Sie stehen $\perp$ aufeinander
   - Sie bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem

[2] nach Ordnen von Zeilen und Spalten ist $\underline{A}^{-1}$ aus TE ablesbar

5. Kartesisches Koordinatensystem: Fester Punkt 0 als Urspring, kartesische Basis, damit eindeutige Zuordnung
   $P \leftrightarrow \overrightarrow{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = \vec{r}$ (Ortsvektor von P)
   Bezeichnung: $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$
   bzw: $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \vec{x}$
   Betrag eines Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

Das Skalarprodukt Es sei φ der Winkel zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$

Definition 10 Die Zahl $(\vec{a}, \vec{b}) := |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$ heißt Skalarprodukt der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

Eigenschaften des Skalarprodukts

1. $(\vec{a}, \vec{a}) > 0$ für $\vec{a} \neq \vec{0}$
2. $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$ (Symmetrie)
3. $(\lambda\vec{a} + \mu\vec{b}, \vec{c}) = \lambda(\vec{a}, \vec{c}) + \mu(\vec{b}, \vec{c})$ (Linearität)

Satz 4 Es sei $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$.
Dann gilt: $(\vec{a}, \vec{b}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$
Folgerung: $(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a}^T\vec{b} = \vec{b}^T\vec{a}$

Anwendungen:

1. Projektion $\vec{a}_{\vec{b}}$ von $\vec{a}$ auf $\vec{b}$: $\vec{a}_{\vec{b}} = \frac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{b}|^2} \cdot \vec{b}$
   denn $\vec{a}_{\vec{b}} = |\vec{a}| \cos\varphi \cdot \underbrace{\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}}_{\vec{b}^0} = \frac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{b}|^2} \cdot \vec{b}$
2. Winkel φ zwischen 2 Vektoren: $\cos\varphi = \frac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$
3. Orthogonalitätskriterium $(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{(|\vec{a}| = 0)}_{\vec{a}=\vec{0}} \vee \underbrace{(|\vec{b}| = 0)}_{\vec{b}=\vec{0}} \vee (\cos\varphi = 0)$
   Vereinbarung: $\vec{0}$ orthogonal zu jedem Vektor $\curvearrowright (\vec{a}, \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$

Das vektorielle Produkt

Definition 11 Das vektorielle Produkt (auch Kreuzprodukt) $\vec{a} \times \vec{b}$ zweier Vektoren ist ein Vektor, der eindeutig festgelegt ist durch:

1. $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi$

2. $\vec{a} \times \vec{b}$ ist senkrecht zu $\vec{a}$ und senkrecht $\vec{b}$

3. $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{a} \times \vec{b}$ bilden ein Rechtssystem

Eigenschaften des vektoriellen Produkts: $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$
$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$
speziell: $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$ (stets!)
$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k},\ \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i},\ \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$
$\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}$ usw.

Satz 5 $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & a_1 & b_1 \\ \vec{j} & a_2 & b_2 \\ \vec{k} & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \cdot \vec{i} - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \cdot \vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \vec{k}$

Anwendungen:

1. Flächeninhalt des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms $F = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi$

2. Flächeninhalt eines Dreiecks $\triangle P_1P_2P_3$
   $F_\triangle = \frac{1}{2}|\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3}|$

3. Parallelitätskriterium
   $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow |\vec{a} \times \vec{b}| = 0 \Leftrightarrow (|\vec{a}| = 0) \vee (|\vec{b}| = 0) \vee (\sin\varphi = 0)$
   Vereinbarung $\vec{0} \parallel$ zu jedem Vektor
   $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$

Das Spatprodukt

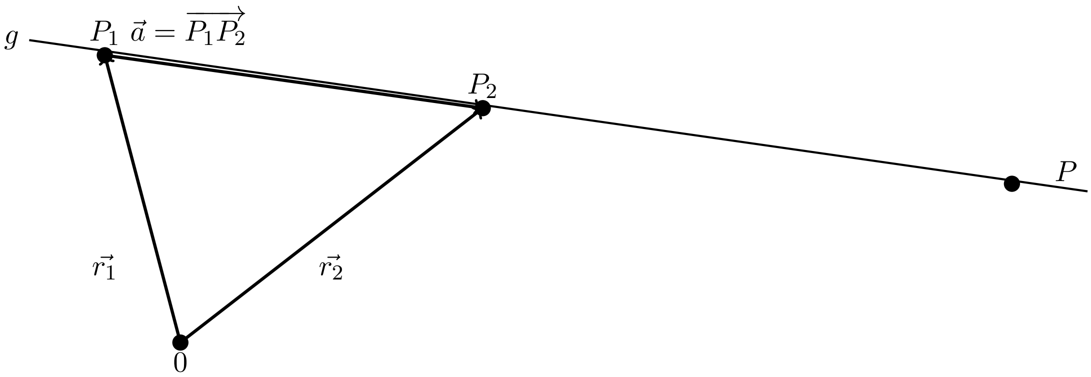
Definition 12 Die Zahl $(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c})$ heißt Spatprodukt der Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$.
Eigenschaften $\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b} \times \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{c} \times \vec{a}, \vec{b})$ (zyklische Vertauschung)
Berechnung: $(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}) = \det(\vec{a}|\vec{b}|\vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$
Anwendung:

1. Volumen des von $\vec{a}, \vec{b}$ und$\vec{c}$ aufgespannten Spates (Parallelotrops): $V = |(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c})|$
   Bemerkung: Spatprodukt $\begin{cases} > 0 & \text{Rechtssystem} \\ < 0 & \text{Linkssystem} \end{cases}$

2. Komplanaritätskriterium
   $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ sind komplanar, d.h. sie liegen in 0 angehaftet in einer Ebene, genau dann wenn: $(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}) = 0 \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ sind linear abhängig

Geraden- und Ebenengleichungen

1. Parameterdarstellung (P.d.) einer Geraden g durch die Punkte P_1 und P_2



   $P\ldots$ beliebiger Punkt von g
   $\curvearrowright \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_1} + t \cdot \overrightarrow{P_1P_2}, t \in \mathbb{R}$
   $\vec{r} = \vec{r_1} + t \cdot (\vec{r_2} - \vec{r_1}), t \in \mathbb{R}$
   bzw.: $\vec{r} = \vec{r_1} = \vec{r_1} + t \cdot \vec{a}, t \in \mathbb{R}$

2. Parameterdarstellung einer Ebene E durch drei Punkte P_1, P_2, P_3 die nicht auf einer Geraden liegen
   $P\ldots$ beliebiger Punkt von E.
   $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_1} + u \cdot \overrightarrow{P_1P_2} + v \cdot \overrightarrow{P_1P_3}, u, v \in \mathbb{R}$
   $\vec{r} = \vec{r_1} + u \cdot (\vec{r_2} - \vec{r_1}) + v \cdot (\vec{r_3} - \vec{r_1})u, v \in \mathbb{R}$
   $\vec{r} = \vec{r_1} + u \cdot \vec{a} + v \cdot \vec{b}, u, v, \in \mathbb{R}$

3. Parameterfreie Ebenengleichung
   Normalvektor $\vec{n}(\vec{n} \neq \vec{0}, \vec{n} \perp E)$
   $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \vec{n} \perp \overrightarrow{P_0P}$
   dabei $P(x, y, z)\ldots$ beliebiger Punkt von E
   $P_0(x_0, y_0, z_0)$ fester Punkt von E
   Orthogonal Kriterium $\curvearrowright (\vec{n}, \vec{r} - \vec{r_0}0$ ausführlich:
   $(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix}) = 0$ d.h. $a(x - x_0) + b \cdot (y - y_0) + c \cdot (z - z_0) = 0$
   $\curvearrowright$ Allgemeine Form $ax + by + cz + d = 0$ mit $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$

Einige geometrische Grundaufgaben

1. Schnitt Gerade und Ebene

   Beispiel 16

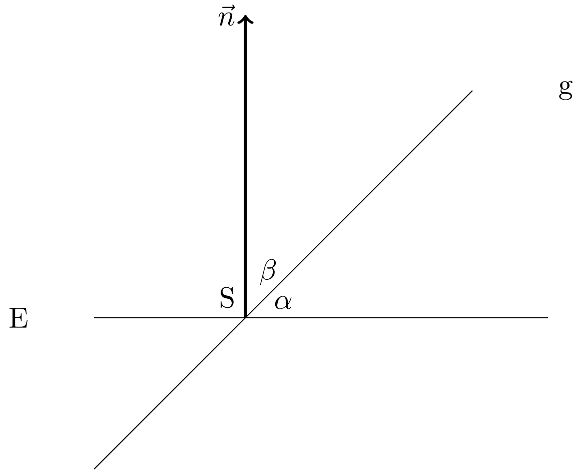
$$\text{Geg. Ebene } E: 2x - 4y + z + 3 = 0 \tag{13}$$

$$\text{Gerade } g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}}_{\vec{a}}, t \in \mathbb{R} \tag{14}$$

   Gesucht

   - Schnittpunkt $S(x_s, y_s, z_s)$
   - Schnittpunkt α
   - $g: x = 3 - ty = tz = 1 - 2t$

   Einsetzen in (13) $\curvearrowright 2 \cdot (3 - t) - 4 \cdot t + 1 - 2 \cdot t + 3 = 0$
   $\curvearrowright -8t + 10 = 0 \curvearrowright t = \frac{5}{4}$
   Einsetzen in (14) $x = 3 - \frac{5}{4} = \frac{7}{4}, y = \frac{5}{4} z = 1 - \frac{5}{2} = -\frac{3}{2}$
   $\curvearrowright \underline{\underline{S(\frac{7}{4}|\frac{5}{4}| - \frac{3}{2})}}$
   Seitenansicht



   $\beta = \angle(\vec{n}, \vec{a})$
   $\alpha = |90° - \beta|$

2. Schnitt zweier Ebenen

3. Abstand $d(P_1, E)$ eines Punktes P_1 von einer Ebene E

4. Abstand $d(Q, g)$ eines Punktes Q von einer Geraden g $\quad g: \vec{r} = \overrightarrow{0P_1} + t\vec{a}, t \in \mathbb{R}$
   $L\dots$ Lotfuspunkt $L \in g, \quad \overline{LQ} \perp g$
   $d =$ Höhe $\overline{LQ}$ des von $\vec{a}$ und $\overrightarrow{P_1Q}$ auf gespannten Parallelogramms
   $\curvearrowright d = d(Q, g) = \frac{|\overrightarrow{P_1Q} \times \vec{a}|}{|\vec{a}|}$ Lotfußpunkt $\overrightarrow{0L} = \overrightarrow{0P_1} + \underbrace{\overrightarrow{P_1Q}_{\vec{a}}}_{\text{Proj. von } \overrightarrow{P_1Q} \text{ auf } \vec{a}}$

5. Abstand $d(g_1, g_2)$ zweier nichtparalleler Geraden:
   $g_1 : \vec{r} = \vec{r_1} + s \cdot \vec{a_1}(s \in \mathbb{R}$
   $g_2 : \vec{r} = \vec{r_2} + t \cdot \vec{a_2}(t \in \mathbb{R})$
   $d = d(g_1, g_2) = \frac{|(\vec{r_2} - \vec{r_1}, \vec{a_1} \times \vec{a_2})|}{|\vec{a_1} \times \vec{a_2}|}$

1.5.6 Transformationen im $\mathbb{R}^2$, homogene Koordinaten

- Transformation eines Punktes $P(x, y) \mapsto P'(x', y')$ (neue Koordinaten im gleichen Koordinatensystem (= aktive Transformationen, wird im folgenden betrachtet)
- eng verwandt: Transformation des Koordinatensystems $P(x, y)$ bleibt fest $\mapsto P'(x', y')$ neue Koordinaten in neuem Koordinatensystem (=passive Transformation)

Translation Verschiebung um den Vektor $\vec{t} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \tag{15}$$

Rotation Zunächst Rotation um 0, Drehwinkel α
Es gilt: $x = r \cos \varphi, \ y = r \sin \varphi$
$(r, \varphi \dots$ Polarkoordinaten)
$x' = r \cos (\varphi + \alpha) = \underbrace{r \cos \varphi}_{x} \cos \alpha - \underbrace{r \sin \varphi}_{y} \sin \alpha$
$\curvearrowright x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha$
analog $y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \alpha - \sin \alpha \\ \sin \alpha \cos \alpha \end{pmatrix}}_{\text{Rotationsmatrix } \underline{R_\alpha}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Spiegelung an einer Geraden g durch 0 mit dem Normaleneinheitsvektor $\vec{n}$ ($|\vec{n}| = 1$)
$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = (\vec{E} - 2\vec{n}\vec{n}^T) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ sogenannte HouseHolder-Matrix $\underline{H}$ (vgl. ÜA A6.23)
Bemerkung: Geradengleichung $ax + by + c = 0$

$$\curvearrowright \vec{n} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b2}} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Skalierung (Zoom) Koordinatenweise Streckung (oder Stauchung) von 0 aus mit den Skalierungsfaktoren u in x-Richtung, v in y-Richtung

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix}}_{\text{Skalierungsmatrix } \underline{S}_{u,v}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

speziell Spiegelung an x-Achse: $u = 1, v = -1$
speziell Spiegelung an y-Achse: $u = -1, v = 1$

Diskussion

1. Drehungen um Punkte $\neq 0$ und Spiegelungen an Geraden nicht durch 0 können durch Hintereinanderausführung einer Translation, Drehung bzw. Spiegelung und Rück-Translation realisiert.

2. Mit Ausnahme der Translation können die beschriebenen Transformationen durch Matrizen-Multiplikationen beschrieben werden (! lineare Abbildung) Zum Zwecke der Vereinheitlichung werden homogene Koordinaten eingeführt

Homogene 2D-Koordinaten eines Punktes $P(x, y)$: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$

(noch allgemeiner für $h \neq 0$: $\begin{pmatrix} hx \\ hy \\ h \end{pmatrix}$, kartesische Koordinaten ergeben sich dann durch Division durch die 3. Koordinate. Damit sind auch Zentralprojektionen beschreibbar, im folgenden $h = 1$)

- Translation in homogenen 2D-Koordinaten
  Translationsvektor $\vec{t} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{Transformationsmatrix für homogene Koord } \underline{\tilde{T}_t}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \tag{16}$$

  Inverse ($\triangleq$ Rück-Translation): $\underline{\tilde{T}_t}^{-1} = \underline{\tilde{T}}_{(-\vec{t})} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- Rotation um 0, Spiegelung an Geraden durch 0, Skalierung in homogenen Koordinaten
  Es sei $\underline{M}$ die Transformationsmatrix vom Typ $(2, 2)$ für die kartesischen Koordinaten $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Dann ist die Transformationsmatrix für die homogenen Koordinaten:

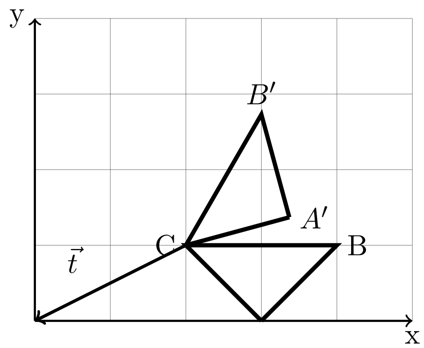
$$\underline{\tilde{M}} := \left(\begin{array}{c|c} \underline{M} & 0 \\ \hline 00 & 1 \end{array} \right), \underline{\tilde{M}^{-1}} := \left(\begin{array}{c|c} \underline{M}^{-1} & 0 \\ \hline 00 & 1 \end{array} \right)$$

- Damit lässt sich die Hintereinanderausführung von beliebigen Translationen, Rotationen, Spiegelungen und Skalierungen durch Matrizenmultiplikationen darstellen (!nicht kommutativ). Die Gesamttransformation ist durch eine $(3,3)$-Matrix $\underline{\tilde{M}}$ darstellbar.

- Mit einer weiteren Matrizenmultiplikation kann das Ergebnis der Gesamttransformation für k Punkte $A(a_1, a_2), B(b_1, b_2), C(c_1, c_2), \ldots$ erhalten werden:

$$\underline{\tilde{M}} \cdot \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A & B & C & \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \ldots \\ a_2 & b_2 & c_2 & \ldots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A' & B' & C' & \end{array} \\ \begin{pmatrix} a'_1 & b'_1 & c'_1 & \ldots \\ a'_2 & b'_2 & c'_2 & \ldots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots \end{pmatrix} \end{array}$$

Beispiel 20: Das Dreieck ABC mit $A(3,0), B(4,1)$ und $C(2,1)$ ist um seinen Eckpunkt C um $60°$ zu drehen (mathematisch positiv). Man gebe die Transformationsmatrix $\underline{\tilde{M}}$ für homogene 2D Koordinaten sowie das Bild an.



1. Translation um $\vec{t} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

   $\curvearrowright \underline{\tilde{T}}_{\vec{t}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. Rotation um $\alpha = 60°$ um 0

   $\underline{R}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

   $\curvearrowright \underline{\tilde{R}}_\alpha = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. Rücktranslation $\underline{\tilde{T}}_{-\vec{t}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\curvearrowright \underline{\tilde{M}} = \underline{\tilde{T}}_{(-\vec{t})}\underline{R}_\alpha\underline{\tilde{T}}_{\vec{t}}$
$\curvearrowright A'(3,37; 1,37), B'(3; 2,73), C'(2; 1)$

Bemerkung: Analoges Vorgehen im $\mathbb{R}^3$, homogene Koordinaten $x, y, z, 1$. Spiegelung an einer Ebene mit Normalen-Einheitsvektor $\vec{n}$ mit $(3,3)$- HOUSEHOLDER-Matrix.

Rotation um eine beliebige Achse (durch 0) durch 3 Drehungen um die Koordinatenachsen ersetzbar, ...
Anschließend erfolgt Projektion in $\mathbb{R}^2$

1.5.7 Eigenwerte und Eigenvektoren

Es sei $\underline{A}$ eine (n,n)-Matrix.

Definition 13 Die Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$ heißt Eigenwert (EW) der quadratischen Matrix $\underline{A}$, falls die Gleichung $\underline{A}\,\underline{x} = \lambda \underline{x}$ nicht triviale Lösungen $\underline{x}$ $(x \neq 0)$ besitzt. Diese heißen dann Eigenvektoren (EV) von $\underline{A}$ zum EW λ.

Diskussion:

1. $\underline{A}\,\underline{x} = \lambda \underline{x} \Leftrightarrow (\underline{A} - \lambda \underline{E})\underline{x} = \underline{0}$ (homogenes System), d.h. nicht triviale Lösungen existieren genau dann, wenn $\det(\underline{A} - \lambda \underline{E}) = 0$ (charakteristische Gleichung) gilt.

2. $\curvearrowright$ Vorgehensweise zur Ermittlung von EW zu EV von $\underline{A}$
   - charakteristische Gleichung lösen (n im allg. komplexe Lösungen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$) $\curvearrowright$ EW
   - Gleichungssysteme $\underline{A} - \lambda_i \underline{E})\underline{x} = \underline{0}$ lösen $\curvearrowright$ EV

Im folgenden werden nur symmetrische (n,n)-Matrizen $\underline{S}$ betrachtet, d.h. $\underline{S}^T = \underline{S}$

Satz 6 Es sei $\underline{S}$ symmetrische (n,n)-Matrix. Dann gilt:

1. Alle EW von $\underline{S}$ sind reell.

2. Zu verschiedenen EW λ_1 bzw. $\lambda_2 (\lambda_1 \neq \lambda_2)$ gehörende EV $\vec{v}_1$ bzw. $\vec{v}_2$ sind orthogonal (vgl. Diskussion)

3. Es gibt eine Basis des Raumes $\mathbb{R}^n$, die aus n paarweise orthonormierten EV $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ von $\underline{S}$ besteht (vgl. Diskussion)

4. Es sei $\underline{V} = (\vec{v}_1; \vec{v}_2; \ldots; \vec{v}_n)$ eine Matrix, die aus n paarweise orthonormierten EV von $\underline{S}$ zusammengesetzt ist. Dann gilt:
   - $\underline{V}\,\underline{V}^T = \underline{V}^T \underline{V} = \underline{E}$ (d.h. $\underline{V}^{-1} = \underline{V}^T$, $\underline{V}$ nennt sich auch orthogonale Matrix.
   - $\underline{V}^T \underline{S}\,\underline{V} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix} = \Lambda$ (Diagonalmatrix)

   $\curvearrowright \underline{S} = \underline{V}\,\underline{\Lambda} \underline{V}^T$

- Es gilt $\underline{S}^{-1} = \underline{V}\,\underline{\Lambda}^{-1}\underline{V}^T$ (dabei $\underline{\Lambda}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix}$ und $\underline{S}^m = \underline{V}\underline{\Lambda}^m\underline{V}^T$

Diskussion

1. Übertragung der Begriffe orthogonal, Länge eines Vektors aus $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^n$
2. $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ heißen orthogonal, wenn $\vec{a}^T\vec{b} = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i = 0$ gilt, Skalarprodukt
$$(\vec{a}, \vec{b}) = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$
3. Betrag (Norm) eines Vektors $|\vec{a}| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2}$
4. paarweise orhtonomiert bedeutet
$$(\vec{v}_i, \vec{v}_j) = \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad i = j \text{ d.h. } |v_i| = 1 (\forall i) \\ 0 & \text{falls} \quad i \neq j \end{cases}$$

Definition 13

1. $\underline{A}\,\vec{x} = \lambda\vec{x}$, $\vec{x} \neq \vec{0}$, λ EW , $\vec{x}$ EV
2. Veranschaulichung im Fall $n = 2$:
Die symmetrische Matrix $\underline{A}$ habe die EW λ_1 und λ_2 und orthonormierte EV $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2, \underline{V} = (\vec{v}_1|\vec{v}_2)$
Es gilt:
$\underline{A}\vec{v}_1 = \lambda_1\vec{v}_1$
$\underline{A}\vec{v}_2 = \lambda_2\underline{v}_2$
D.h. $\underline{A}$ bewirkt eine Skalierung mit den Faktoren λ_1 und λ_2 in Richtung $\vec{v}_1$ bzw. $\vec{v}_2$.

Definition 14 Es sei $\underline{S}$ eine reelle symmetrische Matrix vom Typ (n, n). Die Funktion
$$y = Q(\vec{x}) := \underbrace{\vec{x}^T}_{(1,n)} \underbrace{\underline{S}}_{(n,n)} \underbrace{\vec{x}}_{(n,1)} \quad (\vec{x} \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R})$$
heißt quadratische Form.

Diskussion:

1. Im Falle $n = 2$ stellt $Q(\vec{x}) =$ const. (bzw. $Q(\vec{x}) + \vec{a}^T\vec{x} =$ const.) eine Kurve 2. Ordnung dar. Deren Gestalt kann durch die sogenannte Hauptachsentransformation ermittelt werden (vgl. Diskussion 3)

2. Ausführliche Schreibweise $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \underline{S} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix}$ mit $s_{12} = s_{21}$

$$Q(x,y) = (x|y) \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{12} & s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = s_{11}x^2 + 2s_{12}xy + s_{22}y^2 \tag{17}$$

3. Es seien λ_1 und λ_2 die EW von $\underline{S}$ und $\vec{v}_1$ bzw. $\vec{v}_2$ orthonomierte EV. Für einen beliebigen Vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ seien x^*, y^* die Koordinaten bzgl. der Basis

$$\vec{v}_1, \vec{v}_2 : \vec{x} = x^* \cdot \vec{v}_1 + y^* \cdot \vec{v}_2 = (\vec{v}_1|\vec{v}_2) \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \underline{V}\vec{x}^* \tag{18}$$

mit $\vec{x}^* = \begin{pmatrix} x* \\ y* \end{pmatrix}$. Dann gilt

$$Q(x,y) = \lambda_1 x^{*2} + \lambda_2 y^{*2} \tag{19}$$

(Darstellung bzgl. der sog. Hauptachsen)

Denn: $Q(x,y) = \vec{x}^T \underline{Sx} = (\underline{V}\underline{x}^*)^T \underline{SV}\vec{x}^* = \vec{x}^{*T} \underbrace{\underline{V}^T \underline{SV}\vec{x}^*}_{\Lambda \text{ vgl. Satz 6}} = (\vec{x}^*|\vec{y}^*) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} =$ $\lambda_1 x^{*2} + \lambda_2 y^{*2}$

Beispiel 21: $Q(x,y) = 13x^2 - 32xy + 37y^2 = 45$
Welche Kurve?

- Matrix $\underline{S}$ (vgl. (17), $\underline{S} = \begin{pmatrix} 13 & -16 \\ -16 & 37 \end{pmatrix}$ $(s_{12} = -16)$

- charakteristische Gleichung: $\det(\underline{S} - \lambda\underline{E}) \begin{vmatrix} 13-\lambda & -16 \\ -16 & 37-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 50\lambda + 225 = 0 \curvearrowright \underline{\underline{\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 45}}$(EW)

- EV zu $\lambda_1 = 5 : 8x - 16y = 0 \curvearrowright x = 2y, y = t, x = 2t(-16x + 32y = 0) \curvearrowright$ $\underline{\underline{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \\ t \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, t \neq 0}}$

- EV zu $\lambda_2 = 45 : (-32x - 16y = 0), -16x - 8y = 0 \curvearrowright y = -2x, x = u, y = -2u \curvearrowright$ $\underline{\underline{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ -2u \end{pmatrix} = u \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, u \neq 0}}$

- orthonormierte EV z.B: $\vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ (Rechtssystem)

(19) $\curvearrowright Q(x,y) = \lambda_1 x^{*2} + \lambda_2^{*2} = 5x^{*2} + 45y^{*2} = 45 \Leftrightarrow \frac{x^{*2}}{3^2} + \frac{y^{*2}}{1^2} = 1$ Ellipse mit Halbachsen $a = 3, b = 1$

2 Folgen, Reihen, Grenzwerte

2.1 Zahlenfolge

2.1.1 Grenzwerte von Zahlenfolgen

Definition 1 : Es sei $n_0 \in \mathbb{N}$. Eine Funktion f mit $Db(f) = \{n \in \mathbb{N} | n \geq n_0\}$ und $Wb(f) \subseteq \mathbb{R}$ heißt reelle Zahlenfolge.
Schreibweisen:

$$a_n := f(n)$$

$(a_n)_{n \geq n_0} = (a_{n_0}, a_{n_0+1}, a_{n_0+2}, \dots)$
Oft ist $n_0 = 0$ oder $n_0 = 1$.

Beispiel 1

1. $a_n = (-1)^n \cdot n (n \in \mathbb{N}), (a_n) = (0, -1, 2, -3, 4, -5, \dots)$
2. $a_0 = -1, a_n = n \cdot a_{n-1} (n \in \mathbb{N}^*)$ (rekursive Definition)
   $(a_n) = (-1, -1, -2, -6, -24, -120, \dots), a_n = -n!$
3. $a_n = \sum\limits_n \frac{3}{10^n} (n \in \mathbb{N}^*), (a_n) = (0,3; 0,33; 0,333; \dots)$
4. $a_n = a + (-1)^n \cdot \frac{1}{n^2} (n \in \mathbb{N}^*), (a_n) = (0, \frac{5}{4}, \frac{8}{9}, \frac{17}{16}, \frac{24}{25}, \dots)$

Definition 2

- (a_n) heißt konvergent, wenn es eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ gibt mit:

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists n_0(\epsilon) \; (n_0 \in \mathbb{N}), \forall n \in \mathbb{N}_{\geq n_0(\epsilon)} : |a_n - a| < \epsilon$$

- Die Zahl a heißt Grenzwert von (a_n).
  Schreibweise $a = \lim\limits_{n \to \infty} a_n$
- (a_n) heißt divergent, wenn (a_n) nicht konvergent ist.
  Diskussion
- Folgen aus Beispiel 1

Folge	Monotonie	Beschränktheit
a) $a_n = (-1)^n n$	–	–
b) $a_n = -n!$	streng monoton fallend (ab $n = 1$)	–
c) $a_n = \frac{3}{10} + \dots + \frac{3}{10^n}$	streng monoton wachsend	$0,3 \leq a_n < \frac{1}{3}$
d) $a_n = 1 + (-1)^n \cdot \frac{1}{n^2}$	–	$0 \leq a_n \leq \frac{5}{4}$

Satz 1 Jede konvergente Folge ist beschränkt.

Satz 2 Jede monotone und beschränkte Folge ist konvergent.

Definition 5 (a_n) heißt bestimmt divergent gegen $\begin{cases} + & \infty \\ - & \infty \end{cases}$ falls gilt: $\forall C \in \mathbb{R} \exists n_0(C) \forall n \geq n_0(C) \begin{cases} a_n & > C \\ a_n & < C \end{cases}$

Satz 3 Jede unbeschränkte, monoton $\begin{cases} \text{wachsende} \\ \text{fallende} \end{cases}$ Folge ist bestimmt divergent gegen $\begin{cases} + & \infty \\ - & \infty \end{cases}$

Schreibweise $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \begin{cases} + & \infty \\ - & \infty \end{cases}$

Beispiel 2

1. Bsp 1 c) $a_n = \frac{3}{10} + \cdots + \frac{3}{10^n}, (a_n)$ ist monoton wachsend und beschränkt $\underbrace{\Rightarrow}_{\text{Satz 2}} (a_n)$ ist konvergent, $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \frac{1}{3}$
2. Bsp 1 b) $a_n = -n!, (a_n)$ ist monoton fallend und unbeschränkt $\underbrace{\Rightarrow}_{\text{Satz 3}} (a_n)$ ist bestimmt divergent, $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = -\infty$

Diskussion Eine divergente Folge, die nicht bestimmt divergent ist, heißt unbestimmt divergent, z.B. Folge aus Beispiel 1a) $a_n = (-1)^n \cdot n$

Einige wichtige Grenzwerte

1. $\lim\limits_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$
2. $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1$
3. $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{\ln n}{n} = 0$
4. $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{a} = 1 \ (a > 0)$

Rechenregeln (Grenzwertsätze)

Satz4 (a_n) und (b_n) seien konvergente Folgen mit $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = b$. Dann gilt

- $\lim\limits_{n \to \infty} (a_n + b_n) = a + b, \quad \lim\limits_{n \to \infty} (c \cdot a_n) = c \cdot a$
- $\lim\limits_{n \to \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b, \quad \lim\limits_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b} \ (b \neq 0)$

Beispiel 3

1. $a_n = \frac{2n^2-1}{3n^2+n} (n = 1, 2, 3, ...)$
   $a_n = \frac{n^2(2-\frac{1}{n^2})}{n^2(3+\frac{1}{n})} = \frac{2-\frac{1}{n^2}}{3+\frac{1}{n}} \curvearrowright \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{2}{3}$
   Ausklammern der jeweils höchsten Potenzen in Zähler und Nenner.

2. $a_n = n \cdot (\sqrt{n^2+1} - n)$
   In Klammern „$\infty - \infty$“ erweitern, 3. binomische Formel
   $= frac n \cdot (\sqrt{n^2+1} - n) \cdot (\sqrt{n^2+1} + n)\sqrt{n^2+1} + n$

2.1.2 Lineare Rekursionsgleichungen (Differenzgleichungen)

- Allgemeine Form einer Rekursionsgleichung k-ter Ordnung $x_n = f(n, x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_{n-k}), k \geq 1, n \geq n_0 + k$

- Wir betrachten nur lineare Rekursionsgleichungen mit konstanten Koeffizienten (d.h. a_j nicht von n abhängig).

$$\begin{gathered} x_n = a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2} + \cdots + a_k x_{n-k} + h_n \\ k \geq 1, a_k \neq 0, n \geq n_0 + k \end{gathered} \tag{20}$$

- Indexverschiebung möglich (z.B. um k)

$$x_{n+k} = a_1 x_{n+k-1} + \cdots + a_k x_n + h_{n+k},\ n \geq n_0$$

  Wichtig ist die Differenz zwischen höchsten und niedrigsten Index von x (= Ordnung der Rekursionsgleichung)

- Die Differenzgleichung (20) heißt homogen, falls $h_n = 0 (\forall n)$, sonst inhomogen

Zur Lösung von (20)

1. Allgemeine Lösung von (20):

$$x_n = x_n^{(h)} + x_n^{(p)}$$

   dabei ist $x_n^{(h)}$ die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung

$$x_n = a_1 x_{n-1} + \cdots + a_k x_{n-k} \tag{21}$$

   und $x_n^{(P)}$ eine (partikuläre) Lösung der inhomogenen Gleichung (20)

2. Es gibt k Lösungen $x_n^{(1)}, \ldots x_n^{(k)}$ der homogenen Gleichung, so dass gilt

$$x_n^{(h)} = c_1 x_n^{(1)} + \cdots + c_k x_n^{(k)}$$

gilt.
Diese erhält man mit Hilfe der Lösungen der charakteristischen Gleichung

$$\lambda^k = a_1\lambda^{k-1} + a_2\lambda^{k-2} + \cdots + a_{k-1}\lambda + a_k \tag{22}$$

Diese ergibt sich aus dem Ansatz $x_n^{(h)} = \lambda^n$ $(\lambda \neq 0) \overbrace{\curvearrowright}^{(21)} \lambda^n = a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_k\lambda^{n-k} | : \lambda^{n-k} \curvearrowright (22)$
Bei k verschiedenen Lösungen $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ von (22) ergibt sich $x_n^{(h)} = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n + \cdots + c_k\lambda_k^n$, falls z.B. λ_2 2-fach auftritt, dann $x_n^{(h)} = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_1^n \cdot n + \ldots$

3. Für die Partikularlösung $x_n^{(P)}$ führen spezielle Ansätze zum Ziel:

Inhomogenität h_n	Bedingung	Ansatz für $x_n^{(P)}$
Polynom in n (Grad r)	$\lambda = 1$ ist keine*) Lösung von (22)	Polynom vom gleichen Grade mit unbestimmten Koeffizienten
Potenzfunktion b^n	$\lambda = b$ ist keine*) Lösung von (22)	$x_n^{(P)} = A \cdot b^n$

*) bei ξ-facher Lösung ist der Ansatz mit n^ξ zu multiplizieren

4. unbestimmte Koeffizienten $A, \ldots$ durch Einsetzen in die inhomogene Gleichung (20) und Koeffizientenvergleich ermitteln.

5. Die k Konstanzen $C_1, \ldots, C_k$ in der allgemeinen Lösung können durch die Anfangsbedingungen (A,B) (Vorgabe der ersten k Glieder von (x_n)) ermittelt werden.

Es sind also folgende Schritte durchzuführen

1. Allgemeine Lösung$x_n^{(h)}$ der homogenen Gleichung (21) ermitteln

2. eine spezielle Lösung $x_n^{(p)}$ der inhomogenen Gleichung (20) ermittlen

3. $x_n = x_n^{(h)} + x_n^{(p)}$

4. AB erfüllen

Beispiel 4 $x_{n+1} = 2x_n + 3$ $n \geq 0, x_0 = 1$
Erste Glieder: $1, 5, 13, 29, 61, \ldots$
Typ: Lineare Differenzengleichung 1. Ordnung

Lösung:

1. homogene Gleichung $x_{n+1} = 2x_n$ char. Gleichung $\lambda^1 = 2 \curvearrowright \lambda_1 = 2$

2. $h_n = 3$ (Polynom 0-ten Grades) $\curvearrowright$ Ansatz $x_n^{(p)} = A$
Einsetzen in Ausgangsleichung $A = 2 \cdot A + 3 \curvearrowright A = -3$
$\curvearrowright \underline{\underline{x_n^{(p)} = -3}}$

3. $x_n = x_n^{(h)} + x_n^{(p)} = \underline{\underline{C \cdot 2^n - 3}}$

4. $AB: n = 0 \curvearrowright x_0 = 1 = C \cdot \underbrace{2^0}_{1} -3 \curvearrowright \underline{\underline{C = 4}}$

   Also: $\underline{\underline{x_n = 4 \cdot 2^n - 3}}$

Beispiel 5: $x_{n+2} = x_{n+1} + 2x_n \; n \geq 0, x_0 = 2, x_1 = 3$
Erste Glieder: $2, 3, 7, 13, 27, 53, \ldots$
Typ: lineare homogene DifferenzGleichung 2. Ordnung

- Schritt A liefert bereits die allg. Lösung (B und C entfallen)
  $\lambda^2 = \lambda + 2 \curvearrowright \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2 \curvearrowright x_n = x_n^{(h)} = c_1 \cdot (-1)^n + c_2 \cdot 2^n$

- Schritt D: AB erfüllen
  $n = 0, \curvearrowright x_0 = 2 = C_1 + C_2$
  $n = 1 \curvearrowright x_1 = 3 = -C_1 + 2C_2$
  $\underline{\underline{C_2 = \frac{5}{3}, C_1 = \frac{1}{3}}}$
  $\curvearrowright$ Lösung $\underline{\underline{x_n = \frac{1}{3}(-1)^n + \frac{5}{3} \cdot 2^n}}$

Diskussion: Bei einer homogenen linearen Differenzgleichung 2. Ordnung können folgende Fälle auftreten:

- λ_1, λ_2 reell und verschieden
  $\curvearrowright x_n = x_n^{(h)} = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n$ (vgl. Beispiel 5)

- $\lambda_1 = \lambda_2$ (reelle Doppellösung)
  $\curvearrowright x_n = x_n^{(h)} = C_1\lambda_1^n + C_2 n\lambda_1^n = \lambda_1^n(C_1 + C_2 \cdot n)$

- $\lambda_{1,2} = u \pm iv (v \neq 0)$ konjugiert komplexe Lösungen

$$\curvearrowright x_n = x_n^{(h)} = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n \tag{23}$$

  (wie im 1. Fall, die Koeffizienten C_1 und C_2 sind aber im allg. komplex, x_n selbst ist aber reell.

Reeller Ansatz ist mit Hilfe der Formeln von Euler und Moivre möglich:
$\lambda_1^n = (re^{i\varphi})^n = r^n e^{in\varphi} = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$
$\lambda_2^n = (re^{-i\varphi})^n = r^n e^{-in\varphi} = r^n(\cos(n\varphi) - isin(n\varphi))$
Damit reeller Ansatz:

$$x_n = x_n^{(h)} = K_1 r^n \cos(n\varphi) + K_2 r^n \sin(n\varphi) \tag{24}$$

Bemerkung: Falls Rechner mit komplexer Arithmetik vorhanden, so ist (23) bequemer.

2.1.3 Unendliche Reihen

Grundbegriffe

Definition 6

- Geg. Zahlenfolge $(a_n)n \geq n_0, n_0 \in \mathbb{N}$
  Die Zahlenfolge $(s_n)_{n \geq n_0}$ mit
  $s_{n_0} := a_{n_0}, s_{n_0+1} := a_{n_0} + a_{n_0+1}, s_{n_0+2}, s_n := a_{n_0} + a_{n_0+1} + \cdots + a_n, \ldots$ (Partialsummenfolge)
  heißt unendliche Reihe. Bezeichnung: $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$
- Ist die Reihe konvergent, d.h. Folge (s_n) ist konvergent, so heißt $s := \lim\limits_{n\to\infty} s_n =: \sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$ die Summe der Reihe.
- Die Reihe heißt (bestimmt oder unbestimmt) divergent, wenn die Partialsummenfolge die entsprechende Eigenschaft hat.

Beispiel 6: $a_n = a \cdot q^n \quad a \neq 0, q \neq 0, n = 0, 1, 2, \ldots$
d.h. $(a_n) = (a, aq, aq^2, aq^3, \ldots)\ldots$ gemetrische Folge
Quotient zweier aufeinanderfolgender Glieder
$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q \ldots$ Quotient
$(s_n) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} aq^n \ldots$ unendliche geometrische Reihe

- $s_0 = a, s_1 = a + aq, s_2 a + aq + aq^2, \ldots$

$$\begin{array}{r|c} (1) & s_n = a + aq + \cdots + aq^n | \cdot q \\ (2) & s_n \cdot q = aq + \cdots + aq^n + aq^{n+1} \\ \hline (1)-(2) & s_n(1-q) = a(1-q^{n+1}) \end{array}$$

  $\curvearrowright s_n = a \cdot \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ (falls $q \neq 1$) (Summenformel für die endliche geometrische Reihe, dabei $a \ldots$ Anfangsglied, $q \ldots$ Quotient, Anzahl der Summanden $n+1$)

- $\curvearrowright \lim\limits_{n\to\infty} s_n = \frac{a}{1-q}$ (für $|q| < 1$) $\curvearrowright$ Summe der unendlichen geometrischen Reihe

$$s = \sum_{n=0}^{\infty} a \cdot q^n = \frac{a}{1-q} \qquad \text{für } |q| < 1$$

  Anwendung z.B. periodischer Bruch: $0,\overline{72} = 0,7272727272... = \frac{72}{100} + \frac{72}{100^2} + \frac{72}{100^3} + ... = \frac{\frac{72}{100}}{1-\frac{1}{100}} = \underline{\underline{\frac{72}{99}}} = \underline{\underline{\frac{8}{11}}}$
  allg. $q = b^{-p}$ dabei $b \ldots$ Basis $p \ldots$ Periodenlänge, hier $(q = 10^{-2} = \frac{1}{100})$

Beispiel 7: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = a + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$ harmonische Reihe
Offensichtlich ist (s_n) (streng) monoton wachsend. Man kann zeigen, dass s_n nicht beschränkt ist.
Damit folgt aus Satz 3: Die harmonische Reihe ist bestimmt divergent. (Schreibweise: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$)

Definition 7 Die Reihe $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$ heißt

1. absolut konvergent, falls $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} |a_n|$ konvergent
2. bedingt konvergent falls $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$ konvergent $\wedge$ $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} |a_n|$ divergent

Satz 5 $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent $\Rightarrow$ $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$ konvergent

Diskussion

1. Die Umkehrung gilt im allgemeinen nicht. Es gibt konvergente Reihen, die nicht absolut konvergent sind.
   z.B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n}$
2. Für Reihen mit nicht negativen Gliedern $a_n \geq 0$ ist absolute Konvergent identisch mit (gewöhnlicher) Konvergenz (klar weegen $|a_n| = a_n$). Für solche Reihen gilt entweder $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n < \infty$, d.h. (absolute) Konvergenz oder (XOR) $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n = \infty$,d.h. bestimmte Divergenz

Konvergenzfunktion

1. Notwendiges Konvergenzkriterium

   Satz 6
   $$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \text{ konvergent } \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

   Beweis: $a_n = s_n - s_{n-1} \curvearrowright \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \underbrace{\lim\limits_{n\to\infty} s_n}_{s} - \underbrace{\lim\limits_{n\to\infty} s_{n-1}}_{s} = \underline{\underline{0}}$

   Bemerkungen:

   a) Bedingung $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ ist nur notwendig (aber nicht hinreichend), z.B. $a_n = \frac{1}{n}$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ aber $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$.

   b) Anwendung meist in logisch äquivalenter Form
   $$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \text{ divergent}$$

Beispiel 8 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{n}{10n-1})^{50}$

$a_1 = 1,94 \cdot 10^-48, a_2 = 1,30 \cdot 10^{-49}, \ldots$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{10-\frac{1}{n}})^{50} = 10^{-50} \neq 0 \Rightarrow$ Reihe divergent ($\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$)

2. Hinreichende Konvergenzkriterien

   a) LEIBNIZ-Kriterium für alternierende Reihen

   Satz 7

   (o.B.d.A. sei $n_0 = 0$)

$$b_n \geq b_{n+1} > 0 (n \in \mathbb{N}) \wedge \lim_{n\to\infty} b_n = 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n b_n = b_0 - b_1 + b_2 - b_3 \pm \ldots$$

   ist konvergent, d.h. wenn die Beträge b_n der Glieder $a_n := (-1)^n b_n$ einer alternierenden Reihe eine monotone Nullfolge bilden, dann ist die Reihe konvergent.

   Weiter gilt: $|s - s_n| \leq |a_{n+1}|$

   (Fehler bei Approximation von s durch s_n ist höchstens gleich dem Betrag des ersten weggelassenen Gliedes.)

   Beispiel 9: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n} = a - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \pm \ldots$ (alternierende harmonische Reihe)

   $s_1 = 1, s_2 = 0,5, s_3 = 0,8\overline{3}, s_4 = 0,58\overline{3}, s_5 = 0,78\overline{3}, s_6 = 0,61\overline{6}$

   Man kann zeigen $s = \ln 2 = 0,6931$

   b) Vergleichskriterien für Reihen mit nicht-negativen Gliedern

   Satz 8: Majoranten-Kriterium

$$0 \leq a_n \leq b_n (\text{für } n \geq n_1 \geq n_0) \wedge \sum_{n=n_0}^{\infty} b_n \text{ konvergent } \Rightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \text{ konvergent}$$

   Die Reihe $\sum b_n$ heißt konvergente Majorante von $\sum a_n$.

   Zum Beweis

$$a_n \leq b_n \Rightarrow \sum a_n \leq \sum b_n < \infty$$

   Satz 9: Minoraten-Kriterium

$$0 \leq b_n \leq a_n (\text{für } n \geq n_1 \geq n_0) \wedge \sum_{n=n_0}^{\infty} b_n \text{ (bestimmt) divergent}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \text{ ist (bestimmt) divergent}$$

   Reihe $\sum b_n$ heißt divergente Minorante von $\sum a_n$.

Zum Beweis: $a_n \geq b_n \Rightarrow \sum a_n \geq \sum b_n = \infty \curvearrowright \sum a_n = \infty$.

Nützliche Vergleichsreihen für Anwedung der Sätze 8 und 9

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \begin{cases} \text{konvergent} & \text{für} \quad \alpha > 1 \\ \text{divergent} & \text{für} \quad \alpha \leq 1 \end{cases} \tag{25}$$

Beispiel 10: Man untersuche das Konvergenzverhalten folgender Reihen

i. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{n^2 - n + 1}}_{a_n}$

   Vermutung: Verhalten wie $\sum \frac{1}{n^2}$ (Dominanz der höchsten Potenz) $\curvearrowright$ Konvergent wegen $\alpha = 2 > 1$ (25))

   Wir versuchen eine konvergente Majorante zu finden.

   $a_n = \frac{1}{n^2-n+1} \underbrace{\leq}_{\text{wegen } n \leq \frac{n^2}{2} \text{ für } n \geq 2} \frac{1}{n^2 - \frac{n^2}{2}} = \frac{2}{n^2} =: b_n$

   Wegen (25) gilt $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2} = 2 \cdot \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty \Rightarrow \sum a_n < \infty$

   (Reihe $\sum a_n$ konvergent)

ii. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+4}{n^3+n^2+31}$, Verhalten wie $\sum \frac{n^2}{n^3} = \sum \frac{1}{n}$, Divergenz, (**??**) mit $\alpha = 1 \curvearrowright$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$ (divergent)

c) Quotienten- und Wurzelkriterium für Reihen mit beliebigen Gliedern

Satz 10

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \begin{cases} < 1 \\ > 1 \end{cases} \Rightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \text{ ist } \begin{cases} \text{abs. konvergent} \\ \text{divergent} \end{cases}$$

Satz 11

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} < 1 \\ > 1 \end{cases} \Rightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \text{ ist } \begin{cases} \text{abs. konvergent} \\ \text{divergent} \end{cases}$$

Bemerkung: Falls im Satz 10 bzw. 11 $\lim \cdots = 1$ gilt, dann ist mit Hilfe dieser Sätze keine Entscheidung möglich.

(Das gilt z.B. für die Reihen aus Beispiel 10)

Beispiel 11:

i. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (\frac{1}{\ln n})^n \cdot (-1)^n$

   Wurzelkriterium wegen $(\dots)^n$

   $\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\ln n} \lim\limits_{n\to\infty} = 0 < 1 \curvearrowright$ Reihe absolut konvergent.

ii. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n)!}{(n!)^2}$, Quotientenkriterium wegen Fakultät (!)
$|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \frac{\frac{(2(n+1))!}{((n+1)!)^2}}{\frac{(2n)!}{(n!)^2}} = \frac{(2n+2)!(n!)^2}{((n+1)!)^2(2n)!} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)(n+1)} = \frac{n^2(2+\frac{2}{n})(2+\frac{1}{n})}{n^2(1+\frac{1}{n})(1+\frac{1}{n})} \lim\limits_{n\to\infty} 4 > 1 \curvearrowright$ Reihe ist divergent!

Rechenregeln

- $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$ und $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} b_n$ konvergent, Summen a bzw. b.
  Dann gilt $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} (a_n + b_n) = a + b$, $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} c \cdot a_n = c \cdot a$
- $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent $\Leftrightarrow$ Die Glieder a_n beliebig umordnen, ohne dass sich die Summe ändert.
- $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ seien absolut konvergent, Summen a bzw. b. Dann $(\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i) \cdot (\sum\limits_{j=0}^{\infty} b_j) = \sum\limits_{i,j=0}^{\infty} a_i b_j = a \cdot b$
  (bei beliebiger Reihenfolge der Summanden) z.B. Ordnung nach Index-Summe (Cauchy-Produkt)
  $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\sum\limits_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}) = a \cdot b$

2.2 Grenzwerte und Stetigkeit von Funktionen

2.2.1 Grenzwerte von Funktionen

Definition 1 Es sei $x_0 \in \mathbb{R}$ und existiere eine Umgebung $U(x_0)$ mit $U(x_0)\backslash\{x_0\} \subseteq Db(f)$.
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a :\Leftrightarrow$ Für jede Folge (x_n) mit $x_n \in Db(f), x_n \neq x_0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = a$

Anschaulich: $f(x)$ strebt gegen a, wenn x gegen x_0 strebt.
Bermerkung: Die Stelle x_0 selbst muss nicht zu $Db(f)$ gehören!

Beispiel 1 $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 1$

$0 < x < \frac{\pi}{2} \curvearrowright F_{\delta MAB} < F_{\text{Sektor MAB}} < F_{\delta MAC} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\tan x | \cdot \frac{2}{\sin x} \Leftrightarrow 1 < \frac{1}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \Leftrightarrow 1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x \curvearrowright$ Beh.

Analog zu den Grenzwertsätzen für Zahlenfolgen gilt:

Satz 1 Es gelte $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$ und $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b$. Dann

- $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x) + g(x)) = a + b$, $\lim\limits_{x\to\infty} (c \cdot f(x)) = c \cdot a$

- $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x)) = a\cdot b$, $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$ (falls $b\neq 0$)

Beispiel 2

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x^3-7x+4}{3\cos x} = \underline{\underline{\frac{4}{3}}}$
2. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-x-6}{x-3}\lim\limits_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+2)}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3}(x+2) = \underline{\underline{5}}$

$\frac{0}{0}$, Satz 1 nicht anwendbar, z.B. Zähler zerlegen (andere Möglichkeiten später, Diff-Rechnung)

Definition 2

1. rechtsseitiger Grenzwert
   $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = a :\Leftrightarrow$ Für jede Folge (x_n) mit $x_n\in Db(f), x_n > x_0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = a$
2. linksseitiger Grenzwert: $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = a$
3. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a :\Leftrightarrow$ Für jede Folge (x_n) mit $x_n\in Db(f)$ und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = a$
4. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = a$

Diskussion: Uneigentliche Grenzwerte
$\lim\limits_{x\to\dots} f(x) = \begin{cases} + & \infty \\ - & \infty \end{cases}$
(bei bestimmter Divergenz der Funktionswerte für $x\to\dots$, dabe steht $\dots$ für $x_0, x_0-0, x_0+0, -\infty$ oder $+\infty$)

Satz 2 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = a$

Beispiel 5 (einseitige Grenzwerte) $f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{für} \quad x<0 \\ \sqrt{x+1} & \text{für} \quad x\geq 0 \end{cases}$

1. $\lim\limits_{x\to[0]-0} f(x) = \lim\limits_{x\to-0}(-x^2) = \underline{\underline{0}}$
2. $\lim\limits_{x\to+0} f(x) = \lim\limits_{x\to+0}\sqrt{x+1} = \underline{\underline{1}}$
   $\curvearrowright \lim\limits_{x\to 0} f(x)$ existiert nicht

Beispiel 4 $(x\to+\infty,\dots)$ $\lim\limits_{x\to\infty}(x\cdot\sin\frac{4}{x}) \underbrace{=}_{u=\frac{4}{x}\Leftrightarrow x=\frac{4}{u}} \lim\limits_{u\to 0}(\frac{4}{u}\cdot\sin u) = 4\cdot\lim\limits_{u\to 0}\underbrace{\frac{\sin u}{u}}_{1} = \underline{\underline{4}}$

Beispiel 5 (uneigentliche Grenzwerte) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}-0} \tan x = \infty$, $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}+0} \tan x = -\infty$

2.2.2 Stetigkeit von Funktionen

Definition 3

1. Es gelte $U(x_0) \subseteq Db(f)$ f heißt an der Stelle x_0 stetig, wenn $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ gilt. (Grenzwert = Funktionswert)

2. f in x_0 rechtsseitig stetig $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = f(x_0)$

3. f in x_0 linksseitig stetig $\lim\limits_{x \to x_0-0} f(x) = f(x_0)$

Beispiel 6 (Unstetigkeitsstellen)

1. $f_1(x) = \frac{sinx}{x}$, $x \neq 0$ ist in $x_0 = 0$ nicht stetig, da dort nicht definiert
   $\tilde{f}_1(x) := \begin{cases} f_1(x) & \text{für} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{für} \quad x = 0 \end{cases}$ ist stetig in $x_0 = 0$.

2. $f_2(x) = \begin{cases} \arctan(\frac{1}{x}), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ ist unstetig in $x_0 = 0$, „endlicher Sprung“

3. $f_3(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$, ist unstetig in $x_0 = 0$

4. $f_4(x) = \sin(\frac{1}{x}), x \neq 0$, ist unstetig bei $x_0 = 0$

Definition 4 : f heißt stetig in einem Intervall I, wenn f an jeder inneren Stelle $x_0 \in I$ stetig ist und in eventuell vorhandenen Randpunkten von I einseitig stetig ist.

Bemerkung: Jede der in 1.4.1. und 1.4.3. betrachteten Funktionen ist im gesamten Definitionsbereich stetig.

Satz 3 f und g stetig in $x_0 \Leftarrow c_1 f + c_2 g, f \cdot g$ und $f/g(fallsg(x_0) \neq 0)$ stetig in x_0

Satz 4 (Stetigkeit mittelbarer Funktionen) $u = g(x)$ stetig in x_0
$y = f(u)$ stetig in $u_0 = g(x_0) \Leftarrow y = f(g(x))$ stetig in x_0

Satz 5 (Zwischenwertsatz) f sei stetig in $[a; b], f(a)$ und $f(b)$ seinen $\neq 0$ und haben unterschiedliches Vorzeichen. $\Leftarrow \forall x^* \in (a; b)$ $f(x^*) = 0$ d.h. es existieren wenigstens eine Nullstelle.

$\curvearrowright$ Verfahren zur Nullstellenermittlung

- Regula falsi (Schantenverfahren)
- Intervallhalbierungsmethode

Satz 6 f sei stetig in $[a;b]$, dann hat f in $[a;b]$ sowohl ein Maxium als auch ein Minimum.

2.3 Potenzreihen

Definition 1 :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \tag{26}$$

heißt Potenzreihe mit dem Mittelpunkt x_0

Diskussion:

1. Für jedes feste $x \in \mathbb{R}$ stellt (26) eine unendliche (Zahlen)-Reihe dar.
2. Konvergenzbereich $K = \{x \in \mathbb{R} |\ (26) \text{ ist konvergent } \}$
3. Für jedes $x \in K$ existiert der Summenwert $=: f(x)$. Die Funktion $f(x), x \in K$ heißt Grenzfunktion der Potenzreihe (26).

Zur Bestimmung des Konvergenzbereiches: Mit Hilfe der Sätze 10 und 11 aus 2.1.3 (Quotienten/Wurzelkriterium), erhält man absolute Konvergenz in einem symmetrisch um x_0 liegenden sogenannten Konvergenzintervall: $I = (x_0 - r, x_0 + r)$

Dabei ist r der Konvergenzradius:

$$r = \lim_{n\to\infty} |\frac{a_n}{a_{n+1}}| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} \tag{27}$$

Satz 1 : $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ ist absolut konvergent für alle x mit $|x-x_0| < r$, d.h. $x \in I$, divergent für alle x mit $|x - x_0| > r$.

Diskussion:

1. Formel (27) nicht verwechseln mit den Sätzen 10 und 11 (dort Zahlen $\sum a_n$, hier Potenzreihen $\sum a_n(x-x_0)^n$, d.h. a_n ist hier nur der Faktor von $(x-x_0)^n$
2. Falls die Grenzwerte in (27) nicht existieren, gibt es trotzdem einen Konvergenzradius (auf andere Weise berechenbar, vgl. Beispiel 1c)
3. Satz 1 sagt nichts über das Verhalten in den Randpunkten des Konvergenzintervalls aus $\rightarrow$ gesponderte Untersuchungen notwendig.

Beispiel 1:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$, d.h. $x_0 = 0, a_n = \frac{1}{n} (n = 1, 2, \dots)$ (allg. Gestalt: $\sum a_n(x-x_0)^n$)

$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{n}}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

Konvergenzintervall $I = (-1; 1)$

Randpunkte: $x = -1 \curvearrowright \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ (bedingt) konvergent nach Leibnitz-Kriterium

$x = 1 \curvearrowright \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergent (harmonische Reihe bzw. $\alpha = 1$)

$\curvearrowright$ Konvergenzbereich $K = [-1; 1)$

2. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, d.h. $x_0 = 0, a_n = \frac{1}{n!}$

   $|\frac{a_n}{a_{n+1}}| = \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} = \frac{(n+1)!}{n!} \underbrace{\to}_{n\to\infty} \infty$

   $\curvearrowright r = \infty$, d.h. $K = I = (-\infty; \infty)$ (Reihe überall absolut konvergent)

3. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots,\ x_0 = 0$

   $(\sum A_n x^n$ mit $A_n = \begin{cases} \frac{1}{n!} & \text{(n gerade)} \\ 0 & \text{(n ungerade)} \end{cases})$

   $\curvearrowright$ Formale (27) nicht unmittelbar anwendbar.

   Substitution: $u = x^2 \curvearrowright \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{(2n)!}$ untersuchen, $u_0 = 0, a_n = \frac{1}{(2n)!}$

   $|\frac{a_n}{a_{n+1}}| = \frac{\frac{1}{(2n)!}}{\frac{1}{(2n+2)!}} = \frac{(2n+2)!}{(2n)!} = (2n+1)(2n+2) \underbrace{\to}_{n\to\infty} \infty \curvearrowright r_u = \infty$

   absolute konvergent für alle u) $\curvearrowright r_x = \infty \curvearrowright K = I = (-\infty; \infty)$

Beispiel 2 (einige Grenzfunktionen)

1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, x \in (-1; 1)$ (s. 2.1.3.1, geometrische Reihe $a = 1, g = x \curvearrowright s = \frac{a}{1-g} = \frac{1}{1-x}$)

2. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x, x \in \mathbb{R}$, Beweis: in 3.3.1.

Satz 2 Die Grenzfunktion jeder Potenzreihe ist im Konvergenzbereich stetig.

3 Differentialrechnung für Funktionen einer reellen Variablen

3.1 Grundbegriffe

Tangentenproblem
Geg: $y = f(x)$, gesucht Tangente in $P_0(x_0, f(x_0))$

- zunächst Sekante durch P_0 und P_1
- jetzt $P_1 \to P_0$, d.h. $x_1 \to x_0 \curvearrowright$ Sekante geht über in Tangete in Punkt $P_0 \curvearrowright \varphi \to \alpha$

(Leibnitz 1646-1716)

$$\tan\alpha = \lim_{\varphi\to\alpha} \tan\varphi \lim_{x_1\to x_0} \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$$

Definition 1 Die Funktion $y = f(x)$ heißt an der Stelle x_0 (mit $U(x_0) \subseteq Db(f)$) differenzierbar, falls der Grenzwert

$$f'(x_0) := \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

existiert. $f'(x_0)$ heißt 1. Ableitung von f an der Stelle x_0.

Diskussion

1. $f'(x_0) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

2. Gleichung der Tangente in $(x_0, f(x_0))$

   $$y = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0)$$

   Anstieg der Tangente $m = \tan\alpha = f'(x_0)$

3. f in x_0 differenzierbar bedeutet, es existiert eine eindeutige Tangente an die Kurve dieser Stelle. Zum Beispiel ist $f(x) = |x|$ nicht diffbar in $x_0 = 0$

Satz 1

$$f \text{ in } x_0 \text{ diffbar } \Rightarrow f \text{ in } x_0 \text{ stetig}$$

Definition 2 f heißt im Intervall I diffbar, wenn f an jeder inneren Stelle x_0 von I diffbar ist und in eventuell vorhandenen Randpunkten einseitig diffbar ist.
Schreibweise: $y' = f'(x), x \in I$

Definition 3 (höhere Ableitungen)
Rekursive Definition der n-ten Ableitung

$$f^{(n)}(x) := (f^{(n-1)}(x))', n = 1,2,3,\ldots \text{ mit } f^{(0)}(x) := f(x)$$

Beispiel 1 $f(x) = x^n \; n \in \mathbb{N}^*, x \in \mathbb{R}$
$\frac{f(x+h)-f(x)}{n} = \frac{1}{h}((x+h)^n - x^n)$
$\underbrace{=}_{\text{Binomischer Satz}} \frac{1}{h}(x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + \binom{n}{n}h^n - x^n)$
$\overrightarrow{h \to 0} n \cdot x^{n-1} (x \in \mathbb{R})$, d.h. f ist auf $\mathbb{R}$ diffbar mit $f'(x) = nx^{n-1}$

Beispiel 2 $f(x) = \sin x, x \in \mathbb{R}$

$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\sin x + h - \sin x}{h} = \frac{2\cos\frac{2x+h}{2}\cdot \sin\frac{h}{2}}{h} = \underbrace{\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)}_{\to \cos x} \cdot \underbrace{\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}}_{\to 1} \overrightarrow{h \to 0} \cos x$, also $f'(x) = \cos x$

Bemerkung Ableitungen der Grundfunktionen s.z.B. Merkblatt Ableitungen zusammengesetzter Funktionen vgl. Ableitungsregeln (3.2)

Differential $dy = h \cdot \tan\alpha = h \cdot f'(x_0)$

Definition 4

1. $dy := f'(x_0) \cdot h$ heißt das zur Stelle x_0 und den Zuwachs $h = \Delta x$ gehörende Differential von f
2. $\Delta y = f(x_0+h) - f(x_0)$ heißt die zur Stelle x_0 und dem Zuwachs $h = \Delta x$ gehörende Differenz von f

Diskussion

1. Δy ist die Änderung der Funktion $f(x)$, wenn x von x_0 in $x_0 + h$ übergeht. dy ist die entsprechende Änderung, wenn $f(x)$ durch die Tangente an der Stelle x_0 ersetzt wird (Linearisierung)
2. Für kleine Zuwächse Δx gilt $\Delta y \approx dy$, d.h. $\Delta y \approx f'(x_0) \cdot \Delta x$ für kleines $\Delta x \curvearrowright$ Fehlerrechnung
3. Es sei $y = f(x) = x \curvearrowright dy = dx$, andererseits ist $dy = 1 \cdot h = h \curvearrowright h = \Delta x = dx$
4. Damit ist $f'(x) = \frac{dy}{dx}$; 1. Ableitung = Differentialquotient andere Schreibweise $f'(x) = \frac{d}{dx} f(x)$
5. Höhere Ableitungen $f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{(dx)^n} f(x)$

3.2 Differentionsregeln

Satz 1 Falls die Ableitungen auf den rechten Seiten existieren, gilt:

$$(c_1 u(x) + c_2 v(x))' = c_1 u'(x) + c_2 v'(x) = \text{ Linearität}$$

$$u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) = \text{ Produktregel}$$

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} = \text{ Quotientenregel}$$

Beispiel 1

1. $f(x) = 7x^4 + \sqrt[3]{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} = 7x^4 + x^{\frac{1}{3}} + 2x^{-\frac{1}{2}} \to f'(x) = 7 \cdot 4x^3 + \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} + 2 \cdot (-\frac{1}{2}) \cdot x^{-\frac{3}{2}} = 28x^3 + \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x^3}} - \frac{1}{\sqrt{x^3}}$

2. $f(x) = x \ln x (x > 0)$
$f'(x) = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = 1 + \ln x$ (Produktregel!)

3. $f(x) = e^x x^2 + 2 \curvearrowright f'(x) = \frac{e^x(x^2+2) - e^x \cdot 2x}{(x^2+2)^2} = \frac{(e^x(x^2-2x+2)}{(x^2+2)^2}$ (Quotientenregel!)

Satz 2 (Differentiation mittelbarer Funktionen, Kettenregel)

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Diskussion: $y = f(\underbrace{g(x)}_{u}) = f(u)$ mit $u = g(x)$

Differentialschreibweise: $y' = \frac{dy}{dx} = \underbrace{\frac{dy}{du}}_{\text{äußere Ableitung}} \cdot \underbrace{\frac{du}{dx}}_{\text{innere Ableitung}}$

Beispiel 2

1. $y = f(x) = \sin(\underbrace{3x}_{u}$
$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} = \frac{du}{dx} = \cos u \cdot 3 = \underline{\underline{3 \cdot \cos(3x)}}$

2. $y = f(x) = 2^{\tan(3x)}$
Subst. $u = \tan(3x), v = 3x$
$\curvearrowright y = 2^u, u = \tan v, v = 3x$
$\curvearrowright \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{dy}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} = 2^u \cdot \ln 2 \cdot (1 + \tan^2 v) \cdot 3 = 3 \cdot \ln 2 \cdot 2^{\tan(3x)} \cdot (1 + \tan^2(3x))$

Beispiel 3 Logarithmische Differentiation $f(x) = x^{\sin x}, \quad x > 0$
(Basis und Exponent von x abhängig; die Regeln $(x^a)' = ax^{a-1}$ und $(a^x)' = a^x \ln a$ sind nicht unmittelbar anwendbar!)

- Logarithmieren: $\ln f(x) = \sin x \cdot \ln x$
- Diff. nach x: $\underbrace{\frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)}_{\text{Kettenregel}} = \underbrace{\cos x \cdot \ln x + \sin x \frac{1}{x}}_{\text{Produktregel}} \mid \cdot f(x)$
- Auflösen nach $f'(x)$: $\underline{\underline{f'(x) = x^{\sin x}(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x})}}$

Satz 3 (Ableitung der Grenzfunktionen einer Potenzreihe)

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n \quad x \in (x_0 - r, x_0 + r) \Rightarrow f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n \cdot (x - x_0)^{n-1}$$

(gliedweises Differenzieren!)

Beispiel 4 $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n, \quad x \in (-1; 1)$

$(\frac{1}{1-x})' = \frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}, \quad x \in (-1; 1)$

3.3 Anwendungen

3.3.1 Taylorsche Formel, Taylor-Reihe

Problem „Komplizierte“ Funktion $f(x)$ soll in Umgebung von x_0 durch ein Polynom $p_n(x)$ n-ten Grades angenähert werden.

Ansatz $p_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n$

Forderung $p_n(x_0) = f(x_0), p_n'(x_0) = f'(x_0), p_n''(x_0) = f''(x_0), \ldots$
liefert: $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n)$

Definition 1 Das sich ergebende Polynom

$$p_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

heißt TAYLOR-Polynom n-ten Grades, Entwicklungsstelle x_0

Diskussion

1. $p_n(x)$ ist eine Näherung für $f(x)$
   Fehler: $f(x) - p_n(x) =: R_n(x)$ ... Restglied
2. Restglied im allgemeinem umso kleiner, je größer n ist, und je kleiner $|x - x_0|$ ist.
   Oft gilt $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$

Satz 1 (TAYLORsche Formel)
Es sei $f(x)$ in $[a; b]$ $(n+1)$-mal diffbar, sowie $x_0, x \in [a; b]$. Dann existiert ein ξ zwischen x_0 und x, d.h. $\xi = x_0 + \vartheta \cdot (x - x_0), 0 < \vartheta < 1$, so dass gilt: $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$ (Restgliedform von LAGRANGE). Es gilt also:

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k}_{p_n(x)} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(x_0 + \vartheta \cdot (x - x_0))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}}_{R_{n+1}}$$

Diskussion speziell $n = 0 \curvearrowright$

$$f(x) = f(x_0) + f'(\xi) \cdot (x - x_0) \quad \text{mit } \xi = x_0 + \vartheta \cdot (x - x_0), 0 < \vartheta < 1 \tag{28}$$

(Mittelwertsatz der Diff-Rechnung) (28) $\Leftrightarrow \underbrace{\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\text{Sekantenanstieg}} = \underbrace{f'(\xi)}_{\text{Tangentenanstieg}}$

Beispiel 1 $f(x) = e^x, f'(x) = e^x, f''(x) = e^x, \ldots, x_0 = 0 \curvearrowright f(x_0) = 1, f'(x_0) = 1, f''(x_0) = 1, \cdots \curvearrowright$

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k + \frac{e^{\sqrt{x}}}{(n+1)!} x^{n+1},\ 0 < \vartheta < 1$$

z.B: $x = 0,1; n = 4$
$\curvearrowright e^{0,1} = 1 + \frac{0,1}{1!} + \frac{0,1^2}{2!} + \frac{0,1^3}{3!} + \frac{0,1^4}{4!} + \frac{0,1^5}{5!} e^{\vartheta \cdot 0,1}$
$e^{0,1} = 1,10517083(3) + R_4(0,1)$
Fehler: $0 < R_4(0,1) = \frac{0,1^5}{5!} \underbrace{e^{\vartheta \cdot 0,1}}_{<e^{0,1}<e^1<3} < \frac{0,1^5}{5!} \cdot 3 = 2,5 \cdot 10^{-7} = 25 \cdot 10^{-8}$
$\curvearrowright 1,10517083 < e^{0,1} < 1,10517109$
$\curvearrowright \underline{\underline{e^{0,1} = 1,105171}}$ (6 Stellen nach Komma genau) (exakt : 1,105170918)

Beispiel 2 $x_0 = 0$

$$\begin{aligned}
f(x) &= \cos x & &\curvearrowright f(x_0) = 1 \\
f'(x) &= -\sin x & &\curvearrowright f'(x_0) = 0 \\
f''(x) &= -\cos x & &\curvearrowright f''(x_0) = -1 \\
f'''(x) &= \sin x & &\curvearrowright f'''(x_0 = 0 \\
f^{(4)}(x) &= \cos x & &\curvearrowright f^{(4)}(x_0) = 1
\end{aligned}$$

$n = 2m + 1 \curvearrowright$
$\cos x = \underbrace{1}_{f(x_0)} + \underbrace{0}_{\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)} \underbrace{-\frac{x^2}{2!}}_{\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2} +0 + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^m \cdot \frac{x^{2m}}{(2m)!} + 0 + R_{2m+1}$
$\curvearrowright$ Näherung z.B: $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!}$ für $|x| << 1$ Fehler: $R_3(x) \leq \frac{x^4}{4!}$

Beispiel 3

$$\begin{aligned}
f(x) &= (1+x)^\alpha, x_0 = 0 && \curvearrowright f(x_0) = 1 \\
f'(x) &= \alpha(1+x)^{\alpha-1} && \curvearrowright f'(x_0) = \alpha \\
f''(x) &= \alpha(\alpha-1)\cdot(1+x)^{\alpha-2} && \curvearrowright f''(x_0) = \alpha(\alpha-1) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

$\curvearrowright f^{(k)}(x_0) = \binom{\alpha}{k}\cdot k!$
$\curvearrowright (1+x)^\alpha = \sum\limits_{k=0}^{n}\binom{\alpha}{k}x^k + \binom{\alpha}{n+1}(1+\vartheta x)^{\alpha-n-1}x^{n+1} \quad (0<\vartheta<1)$

Beispiel 4 $f(x)$ Polynom n-ten Grades $\curvearrowright f^{(n+1)}(x) = 0 (\forall x\in\mathbb{R})$
$\curvearrowright R_n(x) = 0 (\forall x\in\mathbb{R}) \curvearrowright$ TAYLOR-Polynom stellt $f(x)$ exakt dar.
$f(x) = p_n(x)$ (Entwicklung nach Potenzen von $(x-x_0)$)

Taylor-Reihen

Satz 2 Es sei f auf $U(x_0)$ beliebig oft diffbar und es gelte $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$. Dann gilt:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \text{ (TAYLOR-Reihe)}$$

Denn: TAYLOR-Formel

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_n(x)$$

$n\to\infty \curvearrowright$ Behauptung

Beispiel 5 $e^x = \sum\limits_{k=0}^{n}\frac{x^n}{n!} + R_n(x)$, vgl. Beispiel 1.
Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$.

Beweis: n_0 werde so gewählt, dass $q := \frac{|x|}{n_0} < 1$ gilt. Es sei $n > n_0 \curvearrowright$
$|R_n(x)| = |e^{\vartheta x} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}| < e^{|x|}\cdot\underbrace{\frac{|x|}{1}\cdot\frac{|x|}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{|x|}{n_0}}_{n_0 \text{ Faktoren}}\cdot\underbrace{\frac{|x|}{n_0}\cdot\ldots\cdot\frac{|x|}{n_0}}_{n+1-n_0 \text{ Faktoren}}$
$= e^{|x|}\cdot\frac{|x|^{n_0}}{n_0!}\cdot q^{n+1-n_0} \xrightarrow{n\to\infty} 0$
Es gilt also

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!},\ x\in\mathbb{R}$$

Beispiel 6 $\cos x = \sum\limits_{k=0}^{m\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + R_{2m+1}^{(x)}$, vgl. Beispiel 2 ähnlich wie im Beispiel 5 folgt $\lim\limits_{m\to\infty} R_{2m+1}(x) = 0$ für $x \in \mathbb{R} \curvearrowright$

$\cos x = \sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k \cdot \frac{x^{2k}}{(2k)!}, x \in \mathbb{R}$

$\sin x = \sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, x \in \mathbb{R}$

Beispiel 7 Restgliedunterschung im Beispiel 3 führt auf die Binomialreihe

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k, |x| < 1, \alpha \in \mathbb{R}$$

3.3.2 Grenzwertbestimmung mittels Regel von Bernoulli-l'Hospital

Satz 3 (Regel von Bernoulli-l'Hospital)

- Es gelte
  1. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0 \wedge \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$
  2. $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert (als endlicher oder unendlicher Grenzwert)

  $\Rightarrow \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (Typ: „$\frac{0}{0}$")
- Die gleiche Aussage gilt, wenn 1. ersetzt wird durch
  1. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty \wedge \lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty$ (Typ „$\frac{\infty}{\infty}$")

Zum Beweis: Es seien f, g, f', g' stetig in x_0. Außerdem sei $g'(x_0) \neq 0$.

MWS: $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\overbrace{f(x_0)}^{0} + (x-x_0)\cdot f'(\xi_1)}{\underbrace{g(x_0)}_{0} + (x-x_0)\cdot g'(\xi_2)} = \frac{f'(\xi_1)}{g'(\xi_2)} \xrightarrow{x \to x_0} \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$

Beispiel 8

1. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} \underline{\underline{=\frac{0}{0}}} \lim\limits_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \underline{\underline{1}}$

2. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{lnx}{\sqrt{x}} \underline{\underline{=\frac{\infty}{\infty}}} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = \underline{\underline{0}}$

3. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{1-\cos x} \underline{\underline{=\frac{0}{0}}} \lim\limits_{x\to 0} \frac{2x}{\sin x} \underline{\underline{=\frac{0}{0}}} \lim\limits_{x\to 0} \frac{2}{\cos x} = \underline{\underline{2}}$
   (u.U. Regel mehrfach anwenden!) Aber Vorsicht!)

4. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sinh(x+1)}{\cosh x} \underline{\underline{=\frac{\infty}{\infty}}} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\cosh(x+1)}{\sinh x} \underline{\underline{=\frac{\infty}{\infty}}} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sinh(x+1)}{\cosh x} = ?$
   Regel führt nicht immer zum Ziel

Diskussion

1. Man beachte bei Anwendung von Satz 3: Zähler und Nennen einzeln differenzieren, keine Quotientenregel.

2. Falls $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ nicht existiert, darf man nicht folgern, dass $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ ebenfalls nicht existiert.

Beispiel 9 $g := \lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x+\sin x}{3x-\cos x} \overset{\infty}{\underset{\infty}{=}} \lim\limits_{x\to\infty}\frac{5+\cos x}{3+\sin x}$ existiert nicht
Anderes Vorgehen:
$g = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x(5+\frac{\sin x}{x})}{x(3-\frac{\cos x}{x})} = \underline{\underline{\frac{5}{3}}}$

Weitere unbestimmte Ausdrücke Zurückführung auf Grundtypen „$\frac{0}{0}$“ bzw. „$\frac{\infty}{\infty}$“
„$0\cdot\infty$“: $f(x)\cdot g(x)$ als Doppelbruch schreiben $\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$ oder $\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} \curvearrowright$ „$\frac{0}{0}$“ oder „$\frac{\infty}{\infty}$“
„$\infty-\infty$“: Ausklammern $f(x)-g(x) = f(x)(1-\frac{g(x)}{f(x)})$ oder falls Brüche vorliegen $\to$ Hauptnenner. „0^0“: Umformung: $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} e^{\ln}$ „1^1“: „∞^0“

1. $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{e^x-1}) \overbrace{=}^{„\infty-\infty“} \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-\sin x}{\sin x(e^x-1)}$
   $\overbrace{=}^{„\frac{0}{0}“} \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-\cos x}{\cos x\cdot(e^x-1)+\sin x\cdot e^x}$
   $= \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+\sin x}{-\sin x\cdot(e^x-1)+\cos x\cdot e^x+\cos x\cdot e^x+\sin x\cdot e^x} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$

Beispiel 11 $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0} e^{ln((1-x)^{\frac{1}{x}})} = e^{\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x}\ln(1-x))} \underbrace{=}_{\text{NR}} \underline{\underline{e^{-1}}}$

NR: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1-x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1-x}\cdot(-1)}{1} = -1$

3.3.3 Kurvendiskussion

Problemstellung $y = f(x), x\in Db(f)$
Der Graph $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | y = f(x)\wedge x\in Db(f)\}$ ist zu untersuchen auf:

1. Nullstellen

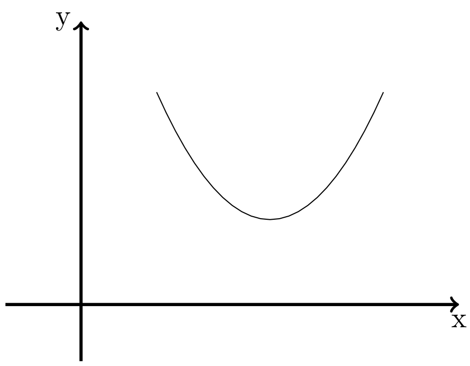
2. Stellen und Art lokaler und globaler Extrema

3. Wendestellen

4. Verhalten im Unendlichen bzw. an den Randstellen des Definitionsbereiches und (falls vorhanden) bei Annäherung an Unstetigkeitsstellen

Diskussion

1. Nullstellenermittlung zB. mit dem NEWTON-Verfahren (vgl. Abschnitt 3.3.5).
   Definition: x_0 heißt Nullstelle n-ter Ordnung, falls
   $$f(x_0) = f'(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \wedge f^{(n)}(x_0) \neq 0$$
2. Lokale Extrema sind extremal bzgl. einer Umgebung $U(x_0) \subseteq Db(f)$
   Globale Extrema sind extremal bzgl. des gesamten Definitionsbereiches.
   Bezeichnungen:
   - x_E …Extremstelle
   - y_E …Extremwert
   - (x_E, y_E) …Extrempunkt
3. Wendepunkte sind Punkte, an denen die Kurve (von „unten“ betrachtet) von konkav in konvex bzw. von konvex in konkav übergeht.
   Dabei:
   - konkav

   - konvex
4. Einige einfache Zusammenhänge zwischen Eigenschaften der Kurve und Ableitungen an der Stelle x_0. (f sei auf $U(x_0)$ hinreichend oft diff-bar.)

$f'(x_0) \underset{>}{<} 0$	$\Rightarrow$	f in $U(x_0)$ streng monoton $\begin{cases} \text{fallend} \\ \text{wachsend} \end{cases}$
$f'(x_0) = 0$	$\Leftarrow$	f in x_0 lokal extremal
$f''(x_0) \underset{>}{<} 0$	$\Rightarrow$	f in $U(x_0) \begin{cases} \text{konkav} \\ \text{konvex} \end{cases}$
$f''(x_0) = 0$	$\Leftarrow$	x_0 ist Wendestelle
$f'(x_0) = 0 \wedge f''(x_0) \underset{>}{<} 0$	$\Rightarrow$	f in x_0 lokal $\begin{cases} \text{maximal} \\ \text{minimal} \end{cases}$

5. Problem: $f'(x_0) = 0, f''(x_0) = 0, \cdots \curvearrowright$ Verhalten bei x_0?

Hinreichende Bedingungen für Vorliegen einer Extremstelle

Satz 4 Es sei $f'(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \wedge f^{(n)}(x_0) \neq 0$ und $f^{(n)}(x)$ stetig in $U(x_0)$. Dann gilt:

1. $n = 2, 4, 6, \ldots$ (n gerade) $\Rightarrow x_0$ ist Extremstelle (lokal), Maximum, falls $f^{(n)}(x_0) < 0$, Minimum falls $f^{(n)}(x_0) > 0$
2. $n = 3, 5, 7, \ldots$ (n ungerade) $\Rightarrow x_0$ ist Horizontal-Wendestelle
   - konvex $\rightarrow$ konkav, falls $f^{(n)}(x_0) < 0$
   - konkav $\rightarrow$ konvex, falls $f^{(n)}(x_0) > 0$

(Beweis mitels TAYLOR-Formel $f(x) = p_{n-1}(x) + R_{n-1}$)

Diskussion Oft günstig

Satz 4' Es sei $f'(x_0) = 0$

1. $f'(x)$ wechselt in x_0 das Vorzeichen
   $$\begin{cases} \text{von } + \text{ auf } - & \Rightarrow \quad x_0 \text{ lokale Max. Stelle} \\ \text{von } - \text{ auf } + & \Rightarrow \quad x_0 \text{ lokale Min. Stelle} \end{cases}$$
2. kein Vorzeichenwechsel $\Rightarrow x_0$ ist Horizontal-Wendestelle

Hinreichende Bedinungen für Vorliegen einer Wendestelle

Satz 5 $f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \wedge f^{(n)}(x_0) \neq 0$ und $f^{(n)}(x)$ stetig in $U(x_0)$. Dann gilt:

1. $n = 3, 5, 7, \cdots \Rightarrow x_0$ ist Wendestelle $\begin{cases} f^{(n)}(x_0) < 0 & \text{konvex} \rightarrow \text{konkav} \\ f^{(n)}(x_0) > 0 & \text{konkav} \rightarrow \text{konvex} \end{cases}$
2. $n = 4, 6, 8 \Rightarrow x_0$ ist keine Wendestelle (sogenannte Flachstelle, Extremum falls zusätzlich $f'(x_0) = 0$)

Satz 5' Es sei $f''(x_0) = 0$

1. $f''(x)$ wechselt bei x_0 das Vorzeichen $\Rightarrow x_0$ Wendestelle
2. kein Vorzeichenwechsel $\Rightarrow$ keine Wendestelle

Bemerkung zu Satz 4' und 5' Vorzeichenwechsel von f' bzw. f'' bei $x = x_0 \Leftrightarrow$ f' bzw. f'' bei x_0 eine Nullstelle ungerader Ordnung besitzt

Beispiel 12 Kurvendiskussion zu $y = f(x) = x^2(\ln x)^4, x > 0$
(Unbedingt) benötigte Ableitungen: $f'(x) = 2x(\ln x)^4 + x^2 \cdot 4(\ln x)^3 \cdot \frac{1}{x}$ $\quad f''(x) = 2(\ln x^4 + 12(\ln x)^3 + 12(\ln x)^2$

1. Nullstellen $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee \ln x = 0 \curvearrowright x_1 = 1$ (4-fach)

2. lokale Extremstellen
   - notwendige Bed. $f'(x)0$
     $\Rightarrow 2x(\ln x)^3(\ln x + 2) = 0$
     $\Rightarrow \ln x = 0 \vee \ln x = -2 \Rightarrow x_{E_1} = 1, x_{E_2} = e^{-2}$ (mögliche Extremstellen)
   - (Zunächst) Untersuchung mittels Satz 4

   weitere Ableitungen (für $x_{E_1} = 1$ benötigt)
   $f'''(x) = (8(\ln x)^3 + 36(\ln x)^2 + 24\ln x) \cdot \frac{1}{x}$
   $f^{(4)}(x) = (-8(\ln x)^3 - 12(\ln x)^2 + 48\ln x + 24) \cdot \frac{1}{x^2}$

3. Wendestellen, notwendige Bedingungen $f''(x) = 0$
   $\curvearrowright 2(\ln x)^2((\ln x)^2 + b\ln x + 6) = 0$
   $\curvearrowright \ln x = 0 \vee (\ln x)^2 + 6\ln x + 6 = 0 \curvearrowright$
   $\ln x = -3 \pm \sqrt{3} \curvearrowright \begin{array}{l} x_{w_1} = e^{-3-\sqrt{3}} \\ x_{w_2} = e^{-3+\sqrt{3}} \end{array}$ (mögliche Wendestellen) Untersuchung: günstig Satz 5', einfache Nullstellen von f'' (ungerade Ordnung) $\curvearrowright$ Vorzeichenwechsel von f''
   $\curvearrowright$ Wendestellen $\curvearrowright w_1(\underbrace{0,0088}_{x_{w_1}}; \underbrace{0,0389}_{y_{w_2}}), w_2(\underbrace{0,2814}_{x_{w_2}}, \underbrace{0,2047}_{y_{w_2}})$
   (oder Satz 5: $f'''(x_{w_{1,2}}) \neq 0$

4. Verhalten für $x \to \infty$ und $x \to +0$
   - $\lim\limits_{x \to +0} \frac{(\ln x)^4}{x^{-2}} = \lim\limits_{x \to +0} \frac{4(\ln x)^3 \cdot \frac{1}{x}}{-2x^{-3}} = \lim\limits_{x \to +0} \frac{-2(\ln x)^3}{x^{-2}} = \cdots = \underline{\underline{0}}$
   - analog $\lim\limits_{x \to +0} f'(x) = 0$
   - $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$

3.3.4 Kurvendarstellungen, Tangenten- und Normalengleichungen, Krümmung

Darstellung ebener Kurven

1. Explizite kartesische Darstellung

$$y = f(x), x \in I$$

   vgl. Abschnitt 3.3.3.

2. Implizite kartesische Darstellung

$$F(x,y)=0$$

Für graphische Darstellung ungünstig, unter bestimmten Bedingungen lässt sich $F(x,y)=0$ auflösen nach y (oder x). Mehr dazu im Kapitel 5 (Differential Rechnung für Funktionen mehrerer Variablen)

3. Parameterdarstellung

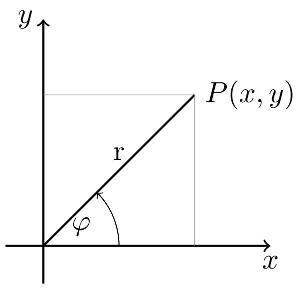
$$x=x(t),y=y(t),t\in I$$

vektorielle Form mit $\vec{r}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}:\ \vec{r}=\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix},t\in I$

Beispiel 13 $x=a\cos t,y=b\sin t \quad t\in[0;2\pi],\underbrace{a>0,b>0}_{\text{Konstanten}}$ Übergang zu parameterfreier Darstellung: t eliminieren
$\curvearrowright \frac{x}{a}=\cos t,\frac{y}{b}=\sin t$
$\curvearrowright \frac{x^2}{a^2}=\cos^2 t,\frac{y^2}{b^2}=\sin^2 t\curvearrowright \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

4. Explizite Darstellung in Polarkoordinaten

- Darstellung eines Punktes in der Ebene



x,y ... kartesische Koordinaten
r,φ ... Polarkoordinaten (analog Betrag und Argument einer Komplexen Zahl)
$r\geq 0,\varphi\in\mathbb{R}$
Umrechnung: $x=\cos\varphi,y=r\sin\varphi$

- Kurvendarstellung:

$$r=r(\varphi),\varphi\in[\alpha,\beta]$$

Für jeden Winkel $\varphi\in[\alpha,\beta]$ die Strecke $r(\varphi)$ auf dem φ entsprechenden Strahl von 0 aus abtragen

Bemerkungen

- Übergang explizite kartesische Darstellung zu Polarkoordinaten

$$y=f(x),x\in[a,b]\curvearrowright x=t,y=f(t),t\in[a,b]$$

- Übergang explizite Polarkoordinatendarstellung zu Polarkoordinaten (Parameter φ)

$$r = r(\varphi), \varphi \in [\alpha, \beta] \curvearrowright x = r(\varphi)\cos\varphi, y = r(\varphi)\sin\varphi\ \varphi \in [\alpha, \beta]$$

Tangenten und Normalen ebener Kurven

- Anstieg y' einer in Parameterdarstellung gegebenen Kurve $x = x(t), y = y(t), t \in I$. Es sei $y = f(x)$ sei die explizite kartesische Darstellung (ohne die Elimination von t tatsächlich auszuführen)
$\curvearrowright \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$ (Kettenregel). In Anwendungen ist t oft die Zeit, übliche Schreibweise dann $\frac{dx}{dt} =: \dot{x}$,
$\frac{dy}{dt} =: \dot{y}$, also gilt $y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$
Höhere Ableitungen $\frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$ usw.

- Tangente im Punkt $(x_0, y_0), y_0 = f(x_0)$ bzw. $x_0 = x(t_0), y_0 = y(t_0)$
Beispielvektor für Tangente $t = \begin{pmatrix} \dot{x}(t_0) \\ \dot{y}(t_0) \end{pmatrix} =: \vec{r}(t_0)$
Für $\vec{n} = \vec{n}(t_0) := \begin{pmatrix} -\dot{y}(t_0) \\ \dot{x}(t_0) \end{pmatrix}$ gilt $(\vec{t}, \vec{n}) = 0 \curvearrowright \vec{n} \perp \vec{t}$, damit ist $\vec{n}$ ein Richtungsvektor der Normalen

Tabelle 1 (Anstieg, Tangenten- und Normalenvektor):

Kurve	$y = f(x), x \in I$	$x = x(t), y = y(t), t \in I$
Punkt $P_0(x_0, y_0)$	$P_0(x_0, \underbrace{f(x_0)}_{y_0})$	$P_0(x(t_0), y(t_0))$
Anstieg $m = \tan\alpha$ im Punkt P_0	$f'(x_0)$	$\frac{\dot{y}(t_0)}{\dot{x}(t_0)}$
Tangentenvektor $\vec{t}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ f'(x_0) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \dot{x}(t_0) \\ \dot{y}(t_0) \end{pmatrix}$
Normalenvektor $\vec{n}$	$\begin{pmatrix} -f'(x_0) \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\dot{y}(t_0) \\ \dot{x}(t_0) \end{pmatrix}$

- Tangetengleichung

$$y = y_0 + m \cdot (x - x_0) \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + s \cdot \vec{t}, s \in \mathbb{R}$$

- Normalengleichung

$$y = y_0 - \frac{1}{m} \cdot (x - x_0) \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + u \cdot \vec{n}, u \in \mathbb{R}$$

Krümmung ebener Kurven Gegeben sei Kurve C, fester Punkt $P_0(x_0, y_0)$. R und S seien zwei weitere Punkte in C. Durch 3 Punkte P_0, R, S ist im Allgemeinen eindeutig ein Kreis festgelegt. Es sei K die Grenzlage des Kreieses, wenn R und S un P_0 übergehen.

- K ... Krümmungskreis
- $\varkappa$ ... Krümmung, vorzeichenbehaftet
- ϱ ... Krümmungsradius $\varrho = \frac{1}{|\varkappa|}$
- M ... Mittelpunkt von K $\overrightarrow{0M} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\varkappa} \cdot \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$

Tabelle 2

Kurve	$y = f(x), x \in I$	$\begin{matrix} x = x(t) \\ y = y(t) \end{matrix}, t \in I$	$r = r(\varphi), \varphi \in I$
Krümmung $\varkappa$ in $P(x, y)$	$\varkappa = \frac{y''}{(1+(y')^2)^{\frac{3}{2}}}$	$\varkappa = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}$	$\varkappa = \frac{r^2+2(r')^2-rr''}{(r^2+(r')^2)^{\frac{3}{2}}}$

Raumkurven

- Parameterdarstellung $\begin{matrix} x = x(t) \\ y = y(t) z = z(t) \end{matrix}$ $t \in I$ vektoriell $\vec{r} = \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}, t \in I$

  mit $\vec{r} = \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

- Tangente in Punkt $P_0(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$

$$\vec{r} = \vec{r}(t_0) + s \cdot \dot{\vec{r}}, s \in \mathbb{R}$$

- Krümmung

$$\varkappa = \frac{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|}{|\dot{\vec{r}}|^3}, \text{ Radius } \varrho = \frac{1}{\varkappa}$$

3.3.5 Newton-Verfahren zur Nullstellenermittlung

Satz 6 (NEWTONsches Iterationsverfahren) Es sei x^* eine Lösung der Gleichung $f(x) = 0$ für ein geeignetes Intervall $I = (x^* - r, x^* + r)$ gelte $f'(x) \neq 0 \wedge |\frac{f(x) \cdot f''(x)}{(f'(x))^2}| \leq k < 1$ $(x \in I)$
Dann konvergiert für jeden Startwert $x_0 \in I$ die mittels $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$ festgelegte Folge gegen x^*. $\lim_{n \to \infty} x_n = x^*$
Ferner gilt:

$$|x^* - x_n| \leq \frac{K}{1-K}|x_{n-1} - x_n| \leq \frac{K^n}{1-K}|x_1 - x_0|$$

Diskussion

1. Geometrische Veranschaulichung
   - Tangente in P_0
     $y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$
   - x_1 ... Nullstelle der Tangente
     $0 = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x_1 - x_0)$
     $\curvearrowright x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$
2. Zur Wahl des Startwertes x_0:
   Falls in I gilt $f''(x) \underset{<}{\overset{>}{}} 0$, dann günstig für Startwert: $f(x_0) \underset{<}{\overset{>}{}} 0$
3. Praktisches Vorgehen: Abbruch falls $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$

4 Integralrechnung für Funktionen einer reellen Veränderlichen

4.1 Integralbegriff

4.1.1 Das bestimmte Integral

Problem Geg: Kurve $y = f(x),\ x \in [a, b]$ (zunächst $f(x) \geq 0$)
Ges: Flächeninhalt I unter der Kurve.

Vorgehensweise

- Zerlegung Z des Intervalls $[a, b] \cdot a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$
- In jedem Teilintervall Zwischenstelle $\xi \in [x_{i-1}, x_i]$ wählen $\curvearrowright$ Zerlegung Z^* (Z mit Zwischenstellen ξ_i)
- $\Delta(Z^*) := \max\,(x_i - x_{i-1})_{i=1,\ldots,n}$ ... max. Teilintervalllänge
- Approximation von I durch Summe von Rechtecksflächen:

  $$S(Z^*, f) := \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

  ... sogenannte RIEMANNsche Summe (Näherung für I)

Definition 1 Die Funktion f heißt (im RIEMANNschen Sinne) über $[a, b]$ integrierbar, wenn für jede Zerlegungsfolge $\forall(Z^*\mu)$ von $[a, b]$ mit $\lim\limits_{\mu\to\infty} \Delta(Z^*_\mu) = 0$ gilt. $\lim\limits_{\mu\to\infty} S(Z^*_\mu, f) = I$
Die Zahl I heißt bestimmtes Integral von f über $[a, b]$
Bezeichnung $I = \int\limits_a^b f(x)\,dx$

Diskussion

1. Definition 1 basiert nicht auf der Forderung $f(x) \geq 0$. Falls $f(x) < 0$ für $x \in [a, b]$, so gilt im Falle der Integrierbarkeit: $\int\limits_a^b f(x)\,dx < 0$

2. Man definiert: $\int\limits_a^a f(x)\,dx := 0, \int\limits_b^* f(x)\,dx,\ b > a$

3. Eigenschaften des bestimmten Integrals $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx \quad (a, b, c \in \mathbb{R})$

$$\int\limits_a^b (c_1 u(x) + c_2 v(x))\,dx = c_1 \int\limits_a^b u(x)\,dx + c_2 \int\limits_a^b v(x)\,dx$$

Satz 1 Es sei $f(x)$ stetig in $[a, b]$. Dann ist $f(x)$ über $[a, b]$ integrierbar.

Diskussion

1. Falls $f(x)$ stückweise stetig ist mit endlichen vielen endlichen Sprungstellen, so ist f ebenfalls integrierbar

2. Nicht integrierbar (im RIEMANNschen Sinne) ist z.B.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \quad \text{irrational} \\ 0 & \text{für } x \quad \text{rational} \end{cases}, x \in [0, 1]$$

4.1.2 Stammfunktionen, unbestimmtes Integral

Satz 2 (Mittelwertsatz der Integralrechnung)

f sei auf $[a, b]$ stetig $\Rightarrow \exists \xi \in (a; b) : \int\limits_a^b f(x)\,dx = f(\xi) \cdot (b - a)$

$m = \frac{1}{b-a} \int\limits_a^b f(x)\,dx \ldots$ (Integral)- Mittelwert von f über $[a, b]$

Integrale mit variabler oberer Grenze

$$\int\limits_a^x f(t)\,dt =: F(x)$$

Satz 3 f stetig auf $[a, b] \Rightarrow F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt,\ x \in [a, b]$ ist auf $[a, b]$ differenzierbar, und es gilt $F'(x) = f(x)$

Beweis: $\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{\int\limits_x^{x+h} f(t)\,dt}{h} = \frac{h \cdot f(\xi)}{h} \underbrace{=}_{\text{Satz } 2, \xi \in [x, x+h]} f(\xi) \Leftarrow_{h \to 0} f(x)$ $\underline{\underline{F'(x) = f(x)}}$

Definition 2 Die Funktion $F(x)$ heißt Stammfunktion von $f(x)$ (auf $[a,b]$), wenn gilt $F'(x) = f(x)$.

Diskussion Ist $F(x)$ eine Stammfunktion, so ist auch $F(x)+c$ ($c \in \mathbb{R}$, konstant) eine Stammfunktion.

Definition 3 Die Menge aller Stammfunktionen von f, d.h. $\{F(x)+c | c \in \mathbb{R}\}$, wobei $F(x)$ eine beliebige Stammfunktion von f ist, heißt unbestimmtes Integral von f :
Bezeichnung $\int f(x)\,dx = F(x) + c$

4.1.3 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Satz 4 f sei stetig auf $[a,b]$, $F(x)$ ... bel. Stammfunktion $\Rightarrow \int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

Schreibweise: $[F(x)]_a^b := F(b) - F(a)$

Beweis: Satz 3, $F_1(x) := \int\limits_a^x f(t)\,dt$ ist Stammfunktion von f, also gilt $F(x) = F_1(x) + k$

$$\curvearrowright F(b) - F(a) = (F_1(b)+k) - (F_1(a)+k) = F_1(b) - \underbrace{F_1(a)}_{0} = F_1(b) = \int\limits_a^b f(t)\,dt = \int\limits_a^b f(x)\,dx$$

Diskussion

1. $\int\limits_a^b f(x)\,dx \quad = \quad F(b) - F(a)$

Flächeninhaltsproblem (Integralrechnung)		Stammfunktion, Umkehrung der Differentialrechnung

2. Symbolik $\frac{dF(x)}{dx} = f(x) \Leftrightarrow \underbrace{\int dF(x)}_{F(x)+c} = \int f(x)\,dx$

3. Differential Tabelle: Tabelle unbestimmter Grundintegrale
   Beispiele:
   a) $\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x \Leftrightarrow \int (-\sin x)\,dx = \cos x + c^* \mid \cdot (-1)$
      $\int \sin x\,dx = -\cos x + c$ (mit $c = -c^*$)
   b) $\frac{d}{dx} x^{\alpha+1} = (\alpha+1)x^\alpha \Leftrightarrow \int (\alpha+1)x^\alpha\,dx = x^{\alpha+1} + c^* \mid \cdot \frac{1}{\alpha+1}$
      $\Leftrightarrow \int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \alpha \neq -1$

4.2 Integrationsmethoden

4.2.1 Substitution

Zu berechnen sei $\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx$. Bekannt sei eine Stammfunktion $F(x)$ von $f(x)$.
Lösung: Substitution $u = g(x) \curvearrowright \frac{du}{dx} = g'(x) \curvearrowright du = g'(x)\,dx$

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)\,du = F(u) + c \underbrace{=}_{\text{Rücksubst.}} F(g(x)) + c \tag{29}$$

Merke: Anwendung zweckmäßig, wenn der Integrand das Produkt einer mittelbaren Funktion und der Ableitung der inneren Funktion ist, und außerdem eine Stammfunktion der äußeren Funktion bekannt ist.

Beispiel 1 $\int \frac{1}{x} \cdot \sqrt[3]{\ln x}\,dx \underbrace{=}_{u=\ln x;\frac{du}{dx}=\frac{1}{x}\curvearrowright du=\frac{1}{x}dx} = \int \sqrt[3]{u}\,du = \frac{3}{4}u^{\frac{4}{3}} + c = \frac{3}{4}(\ln x)^{\frac{4}{3}} + c$

Beispiel 2 $\int xe^{-x^2}\,dx \underbrace{=}_{u=-x^2,\frac{du}{dx}=-2x,\curvearrowright dx=-\frac{du}{2x}} \int e^u \cdot (-\frac{du}{2}) = -\frac{1}{2}\int e^u\,du = -\frac{1}{2}e^u + c = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + c$

Beispiel 3 (Substitution bei bestimmten Integralen)

1. Möglichkeit: Grenzen mit Substituieren: $x = 0 \curvearrowright u = 1, x = \sqrt{8} \curvearrowright u = 9$
   $I = \int\limits_{x=0}^{\sqrt{8}} x \cdot \sqrt{1+x^2}\,dx \underbrace{=}_{u=1+x^2,\frac{du}{dx}=2x,dx=\frac{du}{2x}} \int\limits_{u=1}^{9} \sqrt{u}\frac{du}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}[u^{\frac{3}{2}}]_{u=1}^{9} = \frac{1}{3}(27-1) = \frac{26}{3}$

2. Möglichkeit: Unbestimmte Integration (mit Rücksubstituion) anschließend x-Grenzen einsetzten
   $\int x\sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{3}(1+x^2)^{frac32} + c$
   $I = [\frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}]_{x=0}^{\sqrt{8}} = \frac{26}{3}$

Beispiel 4 (Lineare Substitution)
Allgemein: $\int f(ax+b)\,dx \underbrace{=}_{u=ax+b,\frac{du}{dx}=a,dx=\frac{du}{a}} \int f(u)\frac{du}{d} = \frac{1}{a}F(u) + c = \frac{1}{a}F(ax+b) + c$

1. $\int \cos(3x)\,dx = \frac{1}{3}\sin(3x) + c$
2. $\int e^{-2x}\,dx = -\frac{1}{2}e^{-2x} + c$
3. $\int (3x-4)^6\,dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{7}(3x-4)^7 + c = \frac{1}{21}(3x-4)^7 + c$
4. $\int \sin(\frac{x}{2}+\pi)\,dx = \frac{1}{\frac{1}{2}} \cdot (-\cos(\frac{x}{2}+\pi)) + c = -2\cos(\frac{x}{2}+\pi) + c$

Diskusison Neben diesen „natürlichen“, leicht(?!) [!sic] erkennbaren Substitutionen sind weitere denkbar durch Einführung „künstlicher“ Variabler

$$\int f(x)\,dx \underbrace{=}_{x=\varphi(t),\frac{dx}{dt}=\varphi'(t)\curvearrowright dx=\varphi'(t)\,dt} \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt \tag{30}$$

(30) entspricht (29) von rechts nach links gelesen. Falls rechte Seite von (30) integrierbar (Stammfunktion $H(t)$), dann

$$\int f(x)\,dx = H(t) + c = H(\varphi^{-1}(x)) + c$$

(Vorraussetzung: φ^{-1} existiert)

Beispiel 5 $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx \underbrace{=}_{x=\sinh t \curvearrowright \sqrt{1+x^2}=\cosh t,\, \frac{dx}{dt}=\cosh t \curvearrowright dx=\cosh dt} \int \frac{1}{\cosh t}\,dt = \int dt = t+c =$ $\operatorname{arcsinh} x + c = \ln(x+\sqrt{x^2+1}) + c$

Beispiel 6 $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + c$ (Zähler = 1. Abbleitung des Nenners)
(denn : $u = f(x) \curvearrowright \frac{du}{dx} = f'(x) \curvearrowright du = f'(x)\,dx \curvearrowright \int \cdots = \int \frac{1}{u} \cdot du = \ln|u| + c =$ $\ln|f(x)| + c$

4.2.2 Partielle Integration

Produktregel der Differentialrechnung
$\frac{d}{dx}(u(x)\cdot v(x)) = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)$
$u(x)\cdot v(x) = \int u'(x)\cdot v(x)\,dx + \int u(x)v'(x)\,dx$

$$\curvearrowright \int u(x)\cdot v'(x)\,dx = u(x)\cdot v(x) - \int u'(x)\cdot v(x)\,dx$$

(partielle Integration)

Beispiel 8 $\int \arctan x\,dx = x\cdot\arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx$

$u = \arctan x$	$u' = \frac{1}{1+x^2}$
$v' = 1$	$v = x$

$= x\arctan x - \frac{1}{2}\ln|1+x^2| + c$
$= x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c$

4.2.3 Integration gebrochenrationaler Funktionen

- Geg.: Gebrochen rationale Funktion: $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$
- Integration erfolgt in den Schritten 1.-5.

1. Falls f unecht gebrochen: Polynomdivision

$$f(x) = \underbrace{a(x)}_{\text{Polynom}} + \underbrace{\frac{r(x)}{q(x)}}_{\text{echt gebrochen}} \qquad |r(x)\ldots \text{ Rest}$$

2. Nullstellen des Nenners $q(x)$ ermitteln Zerlegung
$$q(x) = (x-\alpha_1)^{k_1} \cdot (x-\alpha_2)^{k_2} \cdot \dots \cdot (x^2+p_1x+q_1)^{m_1} \cdot \dots \tag{31}$$
(α_n ... reelle Nullstellen, p_n ... reell nicht zerlegbar)
Eventuell gemeinsame Faktoren in $r(x)$ und $q(x)$ kürzen!

3. Ansatz für die sogenannte Partialbruchzerlegung (PZ)
$$\frac{r(x)}{q(x)} = \text{Summe von Partialbrüchen}$$
Jedem Faktor $\left\{\begin{array}{c}(x-\alpha)^k \\ (x^2+px+q)^m\end{array}\right.$ aus (31) entspricht
der Anteil $\left\{\begin{array}{l}\frac{A_1}{x-\alpha}+\frac{A_2}{(x-\alpha)^2}+\dots+\frac{A_k}{(x-\alpha)^k} \\ \frac{B_1x+c_1}{x^2+px+q}+\dots+\frac{B_mx+c_m}{(x^2+px+q)^m}\end{array}\right.$ in dieser Summe.

Beispiel 9 $f(x) = \frac{x^2+4}{(x-1)^3\cdot(x+5)\cdot(x^2+2x+2)^2}$
Ansatz für PZ:
$$f(x) = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{(x-1)^3}+\frac{D}{x+5}+\underbrace{\frac{Ex+F}{x^2+2x+2}+\frac{Gx+H}{(x^2+2x+2)^2}}_{(x^2+2x+2 \text{ ist reell nicht zerlegbar, Nullstellen sind } -1\pm i)}$$

4. Ermittlung der Koeffizienten durch
   a) Multiplikation des Ansatzes für PZ mit Nenner $q(x)$
   b) Kombination der beiden folgenden Methoden
      i. Einsetztn der reellen Nullstellen (Falls alle Nullstellen reell und einfach sind, können damit alle Koeffizienten bestimmt werden)
      ii. Restliche Koeffizienten durch Koeffizientenvergleich bestimmen!

   (vgl. Beispiele)

5. Interpretation der Partialbrüche
   a) $\int \frac{1}{(x-\alpha)^j}\,dx = \left\{\begin{array}{ll}\ln|x-\alpha|+c & (j=1) \\ \frac{1}{1-j}\cdot(x-\alpha)^{1-j}+c & (j=2,3,\dots)\end{array}\right.$
   b) $\int \frac{Bx+c}{(x^2+px+q)^j}\,dx \underbrace{=}_{\text{Zerlegung}} \int\left(\frac{\frac{B}{2}(2x+p)}{(x^2+px+q)^j}+\frac{c-\frac{B}{2}p}{(x^2+px+q)^j}\right)dx$
      i. $\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^j}\,dx$: Substitution $x^2+px+q=u$
      $du = (2x+p)\,dx$ usw.
      ii. $\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^j} = \int \frac{dx}{((x+\frac{p}{2})^2+q-\frac{p^2}{4})^j} = \int \frac{du}{(u^2+a^2)^j}$
      (mit $a^2 := q-\frac{p^2}{4} > 0$ und $u = x+\frac{p}{2}, du = dx$)
      $j=1$: vgl. Merkblatt
      $j>1$: s geeignete Formelsammlung

Beispiel 10 $I = \int \frac{3x+4}{x^2+2x-3}\,dx$

- Echt gebrochen, Nullstellen des Nenners $x_1 = -3, x_2 = 1$
  Zerlegung: $q(x) = x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1)$
- Ansatz für PZ: $\frac{3x+4}{(x+3)(x-1)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-1} \quad | \cdot \underbrace{(x+3)+(x-1)}_{q(x)}$

  $3x + 4 = A \cdot (x-1) + B(x+3)$
  Einsetzen $x = -3 : -5 = A(-4) \curvearrowright \underline{\underline{A = \frac{5}{4}}}$
  $x = 1 : 7 = B \cdot 4 \curvearrowright \underline{\underline{B = \frac{7}{4}}}$
  $I = \int (\frac{\frac{5}{4}}{x+3} + \frac{\frac{7}{4}}{x-1})\,dx = \underline{\underline{\frac{5}{4}\ln|x+3| + \frac{7}{4}\ln|x-1| + c}}$

4.2.4 Integration von Potenzreihen

Satz 1 Es sei

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n, x \in (x_0 - r, x_0 + r)$$

$$\Rightarrow F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}, x \in (x_0 - r, x_0 + r)$$

ist Stammfunktion von $f(x)$. (gliedweise Integration)

Beispiel 12

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \pm \ldots \quad (|x| < 1)$$

Folgerung: $x = 1 \curvearrowright \underbrace{\frac{\pi}{4}}_{\arctan 1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$

Beispiel 13 Gesucht Stammfunktion $F(x)$ zu $f(x) = e^{-x^2}$
$[!e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots]$
$\int\limits_0^x e^{-t^2}\,dt = \int\limits_0^x (1 - t^2 + \frac{t^4}{2!} - \frac{t^6}{3!} \pm \ldots)\,dt = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \frac{x^9}{9 \cdot 4!} \pm \cdots = F(x) \quad (x \in \mathbb{R}$

Diskussion

1. $\int e^{-x^2}\,dx$ ist nicht in geschlossener Form darstellbar.
2. Für nicht zu große x: Reihendarstellung zur Berechnung von $\int\limits_0^x e^{-t^2}\,dt$ gut geeignet:
   z.B. gilt:
   - $I = \int\limits_0^1 e^{-x^2}\,dx = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5 \cdot 2!} - \frac{1}{7 \cdot 3!} \pm \cdots + \frac{1}{17 \cdot 8!} \pm \cdots \approx 0,74682427$

- $|\text{Fehler}| \leq \frac{1}{19 \cdot 9!} = 1,4504 \cdot 10^-7$ (vgl. LEIBNITZ-Kriterium,2.1.3.)
  $\underline{\underline{I = 0,746824}}$ (b Stellen genau)

4.3 Numerische Integration

Ziel Berechnung ovn $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ falls Stammfunktion nicht in geschlossener Form darstellbar.

Prinzip

1. Zerlegung von $[a,b]$ in n gleichlange Teilintervalle der Länge $h = \frac{1}{n}(b-q)$
   $\curvearrowright$ Teilpunkte $x_k = a + k \cdot h(k = 0, 1, \ldots, n), y_k = f(x_k)$
2. Ersetzen von $f(x)$ über den Teilintervallen durch einfachere Funktionen, z.B. lineare Funktionen (Trapezregel), quadratische Funktionen (SIMPSON-Regel)
   Näherung für I:
   $$I \approx S_n(h) = \frac{h}{3}((y_0 + y_n) + 4(y_1 + y_3 + \cdots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \cdots + y_{n-2})) \quad (32)$$
   (n gerade)

Diskussion

1. Fehlerabschätzung
   $$I = S_n(h) - \frac{h^4(b-a)}{180} \cdot f^{(4)}(\xi), \quad a < \xi < b$$
   (falls $f^{(4)}$ stetig auf $[a,b]$)
2. SIMPSON-Regel ist für Polynome bis einschließlich 3. Grades exakt.
3. Praktische Durchführung: Schrittweitenhalbierung.
   Startwert $S^{(1)} := S_n(h)$ für geeignetes n (z.B: $n = 4$).
   $S^{(2)} = S_{2n}(\frac{h}{2}), S^{(3)} = S_{4n}(\frac{h}{4})$ usw., bis sich die Ziffern im Rahmen der gewünschten Genauigkeit nicht mehr ändern.

Beispiel 1 $I = \int\limits_0^1 e^{-x^2}\,dx$

- $n = 4, h = 0,25$

k	x_k	y_0, y_n	y_{2j+1}	y_{2j}
0	0	1,000000		
1	0,25		0,939413	
2	0,5			0,778801
3	0,75		0,569783	
4	1,0	0,367879		
		1,367879	1,509196	0,778801

(32) $\curvearrowright S_4(0,25) = \frac{0,25}{3}(\dots + 4 \cdot \dots + 2 \cdot \dots) = 0,746855$

- Schrittwertenhalbierung

n	h	$S_n(h)$
4	0,25	0,746855
8	0,125	0,746826
16	...	0,746824
32	...	0,746824

$\curvearrowright I = 0,746824$ (vgl. Beispiel 13, Kapitel 4.2.)

4.4 Uneigentliche Integrale

- Vorbetrachtung
  Bisher $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ (endliches Intervall $[a,b]$, stückweise stetig und damit beschränkte Funktion f

- 2 Erweiterungen
  1. Unendliches Intervall $[a;\infty), (-\infty;b]$ bzw. $(-\infty;\infty)$
  2. Unbeschränkte Funktionen (Polstellen)

- Vorgehensweise: „Herausschneiden" der kritischen Stelle(n), anschließend Grenzübergang
  1. Unendliches Intervall
     a) $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\,dx := \lim\limits_{A\to-\infty} \int\limits_A^b f(x)\,dx$
        analog $\int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx := \lim\limits_{B\to\infty} \int\limits_a^B f(x)\,dx$
     b) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx := \lim\limits_{\substack{A\to-\infty \\ B\to\infty}} \int\limits_A^B f(x)\,dx$

Diskussion

1. Falls Grenzwerte existieren, Sprechweise: Integral is konvergent, sonst divergent
2. Vorkommen z.B:
$$\Gamma(x) = \int\limits_0^{\infty} e^{-t}t^{x-1}\,dt \quad (x>0)$$
   (Gamma Funktion) Eigenschaft: $\Gamma(n) = (n-1)!$ für $n \in \mathbb{N}^*$

Beispiel 1

- $\int\limits_0^\infty e^{-x}\,dx = \lim\limits_{A\to\infty}\int\limits_0^A e^{-x}\,dx = \lim\limits_{A\to\infty}[-e^{-x}]_0^A = \lim\limits_{A\to\infty}(-e^{-A}+1) = \underline{\underline{1}}$
- $\int\limits_0^\infty \cos x\,dx = \lim\limits_{A\to\infty}\int\limits_0^A \cos x\,dx = \lim\limits_{A\to\infty}[\sin x]_0^A = \lim\limits_{A\to\infty}\sin A \curvearrowright$ existiert nicht (unbestimmt divergent)
- $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = \lim\limits_{A\to\infty}\int\limits_1^A \frac{1}{x}\,dx = \lim\limits_{A\to\infty}[\ln|x|]_1^A = \lim\limits_{A\to\infty}\ln A = \underline{\underline{\infty}}$ (bestimmt divergent)

3. Unbeschränkter Integrand

   a) Z.B: Unendlichkeitsstelle bei b

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx := \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

   b) Unendlichkeitsstelle $x_0 \in (a;b)$ (Im Inneren)

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\delta\to+0}\int\limits_a^{x_0-\delta} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{x_0+\varepsilon}^b f(x)\,dx$$

Beispiel 2 $\int\limits_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim\limits_{\varepsilon\to+0}\int\limits_\varepsilon^4 dx = \lim\limits_{\varepsilon\to+0}[2\sqrt{x}]_\varepsilon^4 = \underline{\underline{4}}$

4. Unendliches Intervall und unendliche Funktion

Beispiel 3 $I = \int\limits_1^\infty \frac{dx}{x\cdot\sqrt{x-1}}$

NR: $\int \frac{dx}{x\sqrt{x-1}} \underbrace{=}_{u=\sqrt{x-1}\leftrightarrow x=u^2+1,\,\frac{dx}{du}=2u} \int \frac{2udu}{(u^2+1)u} = 2\arctan u + c = 2\arctan\sqrt{x-1}+c$

$I = \lim\limits_{\varepsilon\to+0;A\to\infty}\int\limits_{1+\varepsilon}^A \cdots = \lim\limits_{\varepsilon\to+0;A\to\infty}[2\arctan\sqrt{x-1}]_{1+\varepsilon}^A = \lim\limits_{A\to\infty}2\arctan\sqrt{A-1} - \lim\limits_{\varepsilon\to+0}2\arctan\sqrt{\varepsilon} = \underline{\underline{\pi}}$

4.5 Anwendungen

4.5.1 Geometrische Anwendungen

Inhalt ebener Flächenstücke

- $y = f(x) \geq 0, \quad a < b$

$$F = \int\limits_a^b f(x)\,dx$$

- $$F = \int\limits_a^c |f(x)|\,dx = |\int\limits_a^b f(x)\,dx| + |\int\limits_b^c f(x)\,dx|$$

- $$F = \int\limits_{x_1}^{x_2} (f(x) - g(x))\,dx$$

Beispiel Gesucht ist der Flächeninhalt F des von der Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > 0, b > 0)$ begrenzten Bereiches.

- Auflösen nach $y:$ $y = \pm b \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$

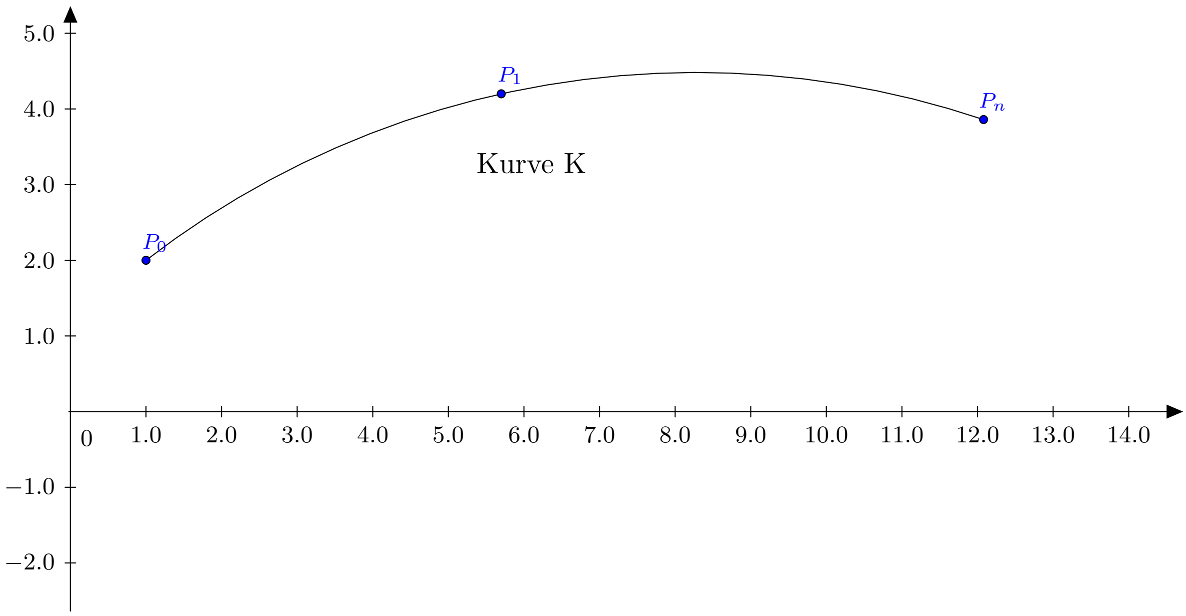
  $\underbrace{\curvearrowright}_{\text{Symmetrie}}$ $F = 4 \cdot \int\limits_0^a b \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\,dx - = \frac{4b}{a} \int\limits_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx \underbrace{=}_{(1)} \frac{4b}{a} \left[\frac{1}{2}(x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin\left(\frac{x}{a}\right))\right]_0^a$

  $= \frac{4b}{a} \cdot \frac{1}{2} a^2 \underbrace{\arcsin 1}_{\frac{\pi}{2}} = \underline{\underline{\pi ab}}$

  (1) s Tabelle oder Substituiere $x = a \sin t, \sqrt{a^2 - x^2} = a \cos t$ $\frac{dx}{dt} = a \cos t$ usw.

Bogenlänge

Bogenlänge ebener Kurven Kurve K mit P.d.
$x = x(t)$ $y = y(t)$ $\alpha \leq t \leq \beta$



- Vorgehen: Approx. durch Streckenzug, Verfeinerung. Länge des Streckenzugs:

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{P_{i-1}P_j} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} \underbrace{=}_{*} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\dot{x}(u_i))^2 + (\dot{y}(v_i))^2}\Delta t_i$$

  $*$) MWS der Diff-Rechnung, Zwischenstellen $u_i, v_i \in (t_{i-1}, t_i)$

  Verfeinerung: $\int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2}\, dt$

- Diskussion

  1. Bogenlänge der Kurve $\vec{r} = \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ zwischen α und t (t variabel)

     $s = \int\limits_{\alpha}^{t} \underbrace{\sqrt{(\dot{x}(u))^2 + (\dot{y}(u))^2}}_{|\dot{\vec{r}}(u)|}$

     $\frac{ds}{dt} = |\dot{\vec{r}}(t)| \curvearrowright ds = |\dot{\vec{r}}(t)|\, dt = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt$ … Bogenelement

  2. Tabelle (Bogenlänge ebener Kurven)

Kurvendarstellung	Bogenlänge s, Bogenelement ds
$x = x(t), y = y(t), t \in [a; \beta]$	$s = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2}\, dt$
$y = f(x), x \in [a; b]$	$s = \int\limits_{a}^{b} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$
$x = g(y), y \in [c; d]$	$s = \int\limits_{c}^{d} \sqrt{1 + (g'(y))^2}\, dy$
$r = r(\varphi), \alpha \leq \varphi \leq \beta$	$s = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(r(\varphi))^2 + (r'(\varphi))^2}\, d\varphi$

Bogenlänge von Raumkurven P.d. der Kurve $K: \; x = x(t), y = y(t), z = z(t), \alpha \leq t \leq \beta$

$$s = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\, dt$$

Beispiel 2 Schraubenlinie $\vec{r} = \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} a\cos t \\ a\sin t \\ \frac{h}{2\pi}t \end{pmatrix}, 0 \leq t \leq 2\pi$

$\dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} -a\sin t \\ a\cos t \\ \frac{h}{2\pi} \end{pmatrix} \curvearrowright s = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\, dt = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{\underbrace{a^2\sin t^2 + a^2\cos t^2}_{a^2} + \frac{h^2}{4\pi^2}}\, dt$

$= 2\pi \cdot \sqrt{a^2 + \frac{h^2}{4\pi^2}} = \underline{\underline{\sqrt{4\pi a^2 + h^2}}}$

Beispiel 3 Archimedische Spirale

$$r = r(\varphi) = a\varphi,\ 0 \leq \varphi \leq \varphi_1,\ a > 0$$

$\curvearrowright r'(\varphi) = a \curvearrowright$

- $\int\limits_0^{\varphi_1} \sqrt{(r(\varphi))^2 + (r'(\varphi))^2}\, d\varphi = \int\limits_0^{\varphi_1} \sqrt{a^2\varphi^2 + a^2}\, d\varphi$
  $= a \cdot \int\limits_0^{\varphi_1} \sqrt{\varphi^2 + 1} d\varphi \underbrace{=}_{*} \frac{a}{2}\left(\varphi_1\sqrt{\varphi_1^2 + 1} + \ln\left(\varphi_1 + \sqrt{\varphi_1^2 + 1}\right)\right)$
  $*$) s Tabelle oder Subst. $\varphi = \sinh t, \sqrt{\varphi^2 + 1} = \cosh t, \frac{d\varphi}{dt} = \cosh t$ usw.
- Zahlenwert für $a = \frac{1}{2}$[cm], $\varphi_1 = 4\pi$ (vgl. ÜA B1.28b)
  $\underline{\underline{s = 40,41[\text{cm}]}}$

Volumen von Rotationskörpern

1. Geg. Kurve $y = f(x), a \leq x \leq b$
   Das Flächenstück F_x zwischen Kurve und x-Achse rotiere um x-Achse, V_x sei das Volumen des dabei erzeugten Körpers

$$V_x = \pi \int\limits_a^b (f(x))^2\, dx$$

   Approx von F_x durch Rechteckflächen $\curvearrowright$ Zylinderscheiben bei Rotation $\curvearrowright V_x \approx \sum\limits_i \pi(\underbrace{f(\xi_i)}_{\text{Radius}})^2 \cdot \underbrace{\Delta x_i}_{\text{Höhe}} \to \pi \int\limits_a^b (f(x))^2\, dx)$

Diskussion

a) Allg. gilt $V_x = \pi \int\limits_{x=a}^{b} y^2\,dx \quad (a < b)$

b) P.d. $x = x(t), y = y(t), \alpha \ldots t \ldots \beta$, aus der allg. Formel (s. Diskussion 1) folgt

$$V_x = \pi \int\limits_{t=\alpha}^{\beta} (y(t))^2 \ldots \underbrace{\dot{x}(t)\,dt}_{dx}$$

Orientierung von K ist so zu wählen, dass $a := x(\alpha) < x(\beta) =: b$ (von links nach rechts)

2. Analg Volumen V_y bei Rotation um y-Achse, vgl. Merkblatt

Beispiel 4 Gesucht Volumen des Rotationsparabolids der Höhe h und dem Basiskreisradius R

$\underbrace{y}_{h} = a \underbrace{x^2}_{R} \curvearrowright h = aR^2$

$\curvearrowright a = \frac{h}{R^2}$

$V_y = \pi \int\limits_{y=0}^{h} x^2\,dy = \pi \int\limits_{y=0}^{h} \frac{y}{a}\,dy = \pi \left[\frac{y^2}{2a}\right]_0^h$

$= \pi \frac{h^2}{2a} = \underline{\underline{\frac{\pi R^2 h}{2}}}$

Mantelfläche von Rotationslkörpern

1. Geg: Kurve $y = f(x)$ (≥ 0), $\quad a \leq x \leq b$
Es sei M_x die von der Kurve K bei Rotation um die x-Achse erzeugte Fläche.

$$M_x = 2\pi \int\limits_{x=a}^{b} f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$$

(Approximation von K durch Polygonzug $\curvearrowright$ Kegelstumpfflächen bei Rotation:
$M_x \approx \sum\limits_i 2\pi f(\xi_i) \cdot \Delta s_i \to 2\pi \int\limits_a^b f(x) \cdot \underbrace{\sqrt{1 + (f'(x))^2}}_{ds \text{ (Bogenelement)}}\ dx$ Allgemein:

$$M_x = 2\pi \int\limits_K y\,ds \quad (y \geq 0)$$

2. Analog Mantelfläche M_y bei Rotation um y-Achse

Beispiel 5 Kugeloberfläche K ... Halbkreis, P.d: $x = R \cdot \cos t, y = R \cdot \sin t \quad (0 \leq t \leq \pi)$
$\curvearrowright \dot{x} = -R\sin t, \dot{y} = R\cos t$
$M_x = 2\pi \int\limits_K y \underbrace{ds}_{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt} = 2\pi \int\limits_{t=0}^{\pi} R\sin t \cdot \underbrace{R\,dt}_{ds} = 2\pi R^2 \cdot \underbrace{[-\cos t]_0^{\pi}}_{2} = \underline{\underline{4\pi R^2}}$

4.5.2 Fourier-Reihen

Geg: Funktion: $y = f(x), x \in [0; T]$
Ges: Reihendarstellung mit trigonomertrischen Funktionen der Perioden $T, \frac{T}{2}, \frac{T}{3}, \ldots$
(d.h. $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ... Kreisfrequenz)
$\cos(\omega x), \cos(2\omega x), \cos(3\omega x), \ldots$
$\sin(\omega x), \sin(2\omega x), \sin(3\omega x), \ldots$
$\curvearrowright$ Ansatz:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos(k\omega x) + b_k \sin(k\omega x))$$

Koeffizienten a_k, b_k sind zu ermitteln

Motivation Approximation von f zum Zwecke der Speicherplatzreduzierung (Abgespeichert werde nur wenige der Koeffizienten a_k, b_k. Das gilt auch dann, wenn f in diskreter Form vorliegt.
Messwerte y_k an den Stellen x_k.)

Vorgehensweise

1. Zunächst endliche Reihe

$$f_n(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos(k\omega x) + b_k \sin(k\omega x)) \tag{33}$$

   a_k, b_k so wählen, dass $f_n(x)$ die geg. Funktion $f(x)$ gut approximiert

2. Approximation in Vektorräumen mit Skalarprodukt
   - Es sei V ein Vektorraum, Skalarprodukt (f, g) nennt man eine Abbildung von $V \times V$ in $\mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:
     a) $(f, f) > 0$ für $f \neq 0$
     b) $(f, g) = (g, f) \forall f, g \in V$ (Symmetrie)
     c) $(\alpha f + \beta g, h) = \alpha(f, h) + \beta(g, h)$ (Linearität)
   - Norm(Betrag) von $f \in V : ||f|| := \sqrt{(f, f)}$
   - f und g heißen orthogonal, wenn $(f, g) = 0$ gilt
   - Beispiele:
     a) $V = \mathbb{R}^n, (\vec{x}, \vec{y}) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i, y_i$ (vgl. Kapitel 1.5.)

b) $V = C(a;b)$ ... Menge der auf $[a,b]$ stetigen reellen Funktionen, $(f,g) := \int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx, ||f|| = \sqrt{\int\limits_a^b (f(x))^2\,dx}$

- Aufgabe: Approximation von $f \in V$, durch $f^* \in V^*$ wobei $V^* \subseteq V$ ein m-dimensionaler Teilraum von V mit der orthogonalen Basis $e_1, \ldots, e_m$ (d.h. $(e_i, e_j) = 0$ falls $i \neq j$) ist. Gesucht ist dasjenige $f^* \in V^*$, für welches $||f - f^*||$ minimal wird $\curvearrowright f^*$ ist die Orthogonal-Projektion von f in V^*

Satz 1 Es gilt

$$f^* = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i e_i \text{ mit } \alpha_i = \frac{(f;e_i)}{(e_i;e_i)}, i = 1, \ldots, m$$

Beweis: $(f - f^*, e_i) = 0 \forall i \Leftrightarrow (f - (\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_m e_m), e_i) = (f;e_i) - \alpha_i(e_i, e_i) = 0$

3. Übertragung auf $C(0,T)(T = \frac{2\pi}{\omega} \Leftrightarrow \omega = \frac{2\pi}{T})$
   - Man kann leicht zeigen (ÜA?!), dass die Funktionen $\underbrace{1}_{g_0}, \underbrace{\cos(\omega x)}_{g_1}, \underbrace{\cos(2\omega x)}_{g_2}, \underbrace{\cos(3\omega x)}_{g_3}, \ldots, \underbrace{\sin(\omega x)}_{h_1}, \underbrace{\sin(2\omega x)}_{h_2}, \ldots$ in $C(0,T)$ paarweise orthogonal sind, z.B.

$$(g_0; g_1) = \int_0^T 1 \cdot \cos(\omega x)\,dx = \left[\frac{1}{\omega}\sin(\omega x)\right]_0^T = \underline{\underline{0}}$$

   - Fener gilt $(g_0, g_0) = T, (g_k, g_k) = \frac{T}{2}, (h_k; h_k) = \frac{T}{2}$

4. Damit ergibt die Projekt von $f \in C(0;T)$ in $L(g_0, g_1, \ldots, g_n, h_1, \ldots, h_n)$ folgende Koeffizienten für die Approximation (33) (vgl. Satz 1)

$$a_k = \frac{(f;g_k)}{(g_k;g_k)} = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos(k\omega x)\,dx$$

analog

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin(k\omega x)\,dx$$

5. Frage: $f_n \to f$?

Satz 2 $f(x)$ und $f'(x)$ seien stückweise stetig mit höchstens endlich vielen, endlichen Sprungstellen in $[0;T]$

- Dann gilt an allen Stetigskeitsstellen von f

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos(k\omega x) + b_k \sin(k\omega x)) \qquad \text{FOURIER-Reihe}$$

  mit

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\,dx$$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos(k\omega x)\,dx$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin(k\omega x)\,dx$$

  $(k = 1, 2, \dots)$

- Für die Sprungstellen x_s gilt:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_s) = \frac{1}{2}(\lim_{x\to x_s-0} f(x) + \lim_{x\to x_s+0} f(x))$$

Bemerkungen

1. Die vorstehenden Ausführungen gelten automatisch auch für die periodische Fortsetzung $\tilde{f}$ einer zunächst auf $[0;T]$ erklärten Funktion f, vgl. ÜA B2.25

2. Integrationsintervalle $[0;T]$ können im periodischen Fall durch beliebige Intervalle der Länge T ersetzt werden, z.B. $\left[-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}\right]$

3. Vereinfachung bei Symmetrie

f gerade	$a_0 = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(x)\,dx, a_k = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(x)\cos(k\omega x)\,dx, b_k = 0$
f ungerade	$a_0 = 0, a_k = 0, b_k = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(x)\sin(k\omega x)\,dx$

   $k = (1, 2, \dots)$ vgl. ÜA(B2.9)

4. Amplitudenspektrum $A_k := \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$ $(k = 1, 2, \dots)$ …Amplituden der Schwingungen, die sich durch Zusammenfassung der Sinus- und Konsiunusanteile gleicher Frequenz ergeben $\curvearrowright$ Möglichkeit der Verstärkung /Dämpfung der Frequenzen

Beispiel 6 $f(x) = \begin{cases} 0 & \dots \quad -1 \leq x < 0 \\ 1 & \dots \quad 0 \leq x < 1 \end{cases}$, $\tilde{f}$ ... periodische Fortsetzung.

Gesucht: FOURIER-Reihe, $T = 2, \omega = \frac{2\pi}{T} = \pi$

$a_0 = \frac{2}{2} \int\limits_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int\limits_{0}^{1} 1 \cdot dx = \underline{\underline{1}}$

$a_k = \frac{2}{2} = \int\limits_{-1}^{1} f(x) \cos(k\pi x)\,dx = \int\limits_{0}^{1} \cos(k\pi x)\,dx = \frac{1}{k\pi} [\sin(k\pi x)]_0^1 = \underline{\underline{0}}$

$b_k = \frac{2}{2} \int\limits_{-1}^{1} f(x) \sin(k\pi x)\,dx = \int\limits_{0}^{1} \sin(k\pi x)\,dx = -\frac{1}{k\pi} [\cos(k\pi x)]_0^1$

$= -\frac{1}{k\pi}(\underbrace{\cos(k\pi)}_{(-1)^k} - 1) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad k \text{ gerade} \\ \frac{2}{k\pi} & \text{für} \quad k \text{ ungerade} \end{cases}$

$\curvearrowright \tilde{f}(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}(\sin(\pi x) + \frac{1}{3}\sin(3\pi x) + \frac{1}{5}\sin(5\pi x) + \dots) \quad x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$

Diskreter Fall Geg: $y = f(x), x \in [0; T]$, gerade Anzahl N von Messstellen (Abtastpunkte), z.B. alle $\frac{1}{100}$ Sek. $\curvearrowright$ Samplerate 100 Hz (bei Autio-CD: 44,1 kHz)
$x_j = j \cdot h = j \cdot \frac{T}{N}(j = 0, 1, \dots, N-1), y_j = f(x_j)$

- Ansatz (33) für $n \leq \frac{N}{2}$ führt im Vektorraum $\mathbb{R}^N$ mittels Satz 1 auf $a_0 = \frac{2}{N} \sum\limits_{j=0}^{N-1} y_j, a_k = \frac{2}{N} \sum\limits_{j=0}^{N-1} y_j \cos(k\omega x_j), b_k = \frac{2}{N} \sum\limits_{j=0}^{N-1} y_j \sin(k\omega x_j) \quad (1 \leq k \leq n)$

- Im Falle $2n = N$ ergibt sich keine Approximation, sonder eine exakte Darstellung des Vektors $\vec{y} = (y_j)_{j0}^{N-1}$ mit Hilfe einer anderen Basis.
  Mit Hilfe der EULERschen Formel $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \cdot \sin\varphi$ lässt sich der Ansatz (33) mit komplexen Koeffzienten c_k umschreiben:
  $$f_n(x) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \cdot e^{i\omega kx}$$
  und damit
  $$y_j = f(x_j) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{i\frac{2\pi}{N}jk} \quad (j = 0, 1, \dots, N-1) \tag{34}$$

Matrix-Form Es sei $w := e^{i \cdot \frac{2\pi}{N}}$ (eine von N Lösungen der Kreisteilungsgleichung $z^N = 1$)
$\underline{F} := \left(w^{jk}\right)_{j,k=0}^{N-1}$ ... FOURIER-Matrix

$$\curvearrowright \underline{y} = \underline{F} \cdot \underline{c} \quad (\text{ mit } \underline{c} = (c_k)_{k=0}^{N-1}) \tag{35}$$

- Man kann zeigen: $\underline{F}$ ist regulär mit $\underline{F}^{-1} = \frac{1}{N} F^*$ mit $\underline{F}^* = \overline{\underline{F}^T} = \left(\bar{w}^{kj}\right)_{k,j=0}^{N-1}$, dabei $\bar{w} = e^{-i\frac{n\pi}{N}}$ (komplex. konj. Zahl)
  Damit ist $\underline{c} = \frac{1}{N}\underline{F}^* \underline{y}$, d.h.

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} y_j \cdot e^{-i\cdot\frac{2\pi}{N}kj} \quad (k = 0, 1, \ldots, N-1) \tag{36}$$

  (36) ... DFT (diskrete FOURIER-Transformation)
  (34) ... IDFT (inverse diskrete FOURIER-Transformation)

- FFT (schnelle diskrete FOURIER-Transformation) für $N = 2^m$) lässt sich die Rechenzeit verkürzen

- Diskrete Kosinustransformation DCT
  $y = f(x), x \in [0; T], N$ gleiche Intervalle, meist $N = 2^m$ Abtastpunkte hier aber die Mitten der Intervalle $x_j = \frac{h}{2} + j \cdot h = T \cdot \frac{2j+1}{2N} (j = 0, 1, \ldots, N-1)$
  Ansatz: $y = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \cos\left(k\frac{\omega}{2}x\right)$ (stetiger Fall) bzw.
  $y_j = \sum\limits_{k=0}^{N-1} a_k \cos\left(\frac{k\pi(2j+1)}{2N}\right)$ (diskreter Fall $j = 0, 1, \ldots, N-1$)
  Matrixform $\underline{y} = \underline{C} \cdot \underline{a}$, Spalten von $\underline{C}$ bilden eine orthogonale Basis von $\mathbb{R}^N$, Normierung so möglich, dass orthonormierte Basis entsteht; damit Vorgehensweise wie bei FOURIER-Transformation möglich:

$$\underline{a} = \underline{C}^{-1}\underline{y} \ldots D \underbrace{C}_{\text{Kosinus}} T, y = \underline{C}\,\underline{a} \ldots IDCT$$

- Anwendung: Audio-/Videokompression (MP3,JPEG) Die komprimierung erfolgt dabei im Frequenzbereich (kleinere Amplituden $a_k \longrightarrow 0$, damit Datenreduktion)

5 Differentialrechnung für Funktionen mehrerer reeller Variablen

5.1 Funktionen mehrerer Variabler $z = f(x_1, \ldots, x_n)$

Funktion $f, Db(f) \subseteq \mathbb{R}^n, Wb(f) \subseteq \mathbb{R} (n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$

$$z = f(x_1, \ldots, x_n) \qquad \begin{array}{lcr} x_1, \ldots, x_n & \ldots & \text{unabhängige Variable} \\ z & \ldots & \text{abhängige Variable} \end{array}$$

Gemetrische Veranschaulichung für $n = 2$
Meist x, y anstelle von $x_1, x_2 : z = f(x, y), (x, y) \in B \subseteq \mathbb{R}^2 \curvearrowright \{(x, y, z))|(x, y) \in B \wedge z = f(x, y)\}$ ... im allgemeinen Fläche im $\mathbb{R}^3$

5.1.1 Flächen im $\mathbb{R}^3$

1. Darstellung eines Punktes $P(x,y,z)$ im $\mathbb{R}^3$
   - x,y,z ... kartesische Koordinate
   - Zylinderkoordinaten r,φ,z

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \\ z &= z \end{aligned}$$

   Umrechnung: $x^2+y^2=r^2$ usw.
   - Kugelkoordinaten r,φ,ϑ (sphärische Kugelkoordinaten)

$$\begin{aligned} x &= r\sin\vartheta\cos\varphi \\ y &= r\sin\vartheta\sin\varphi \\ z &= r\cos\vartheta \end{aligned}$$

   Achtung: r hat andere Bedeutung als bei Zylinderkoordinatne!

2. Flächendarstellungen
   - Explizite kartesische Darstellung $z=f(x,y),(x,y)\in B\subseteq\mathbb{R}^2$
   - Implizite kartesische Darstellung $F(x,y,z)=0$
   - Parameterdarstellung
     $x=x(u,v)$
     $y=y(u,v),\quad (u,v)\in B\subseteq\mathbb{R}^2$
     $z=z(u,v)$
     $\vec{r}=\vec{r}(u,v)=\begin{pmatrix} x(u,v)\\ y(u,v)\\ z(u,v)\end{pmatrix},(u,v)\in B$

     Koordinatenlinien
     $v=v_0$ fest $\curvearrowright \vec{r}=\vec{r}(u,v_0)$ ... Kurvenschar (mit Parameter u) auf Fläche
     $u=u_0$ fest $\curvearrowright \vec{r}=\vec{r}(u_0,v)$ ... Kurvenschar (mit Parameter v) auf Fläche

Beispiel 1 Kugel, Mittelp. 0, Radius R, Kugelkoordinaten $r=R=\text{const.}\curvearrowright$
$x=R\sin\vartheta\cos\varphi \quad 0\le\varphi\le 2\pi \quad \varphi \triangleq$ geogr. Länge
$y=R\sin\vartheta\sin\varphi \quad 0\le\vartheta\le\pi \quad \vartheta\triangleq$ geogr. Breite (vom Nordpol gemessen)
$z=R\cos\vartheta$

Parameterfreie Darstellung
$x^2+y^2+z^2=R^2$ ... implizite kartes. Darstellung
$\curvearrowright z=\pm\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ ... explizite kartes. Darstellung $\left.\begin{matrix}\text{obere}\\ \text{untere}\end{matrix}\right\}$ Halbkugel

- Explizite Darstellung in Zylinderkoordinaten
  $z=f(r,\varphi),(r,\varphi)\in B\subseteq[0;\infty)\times\mathbb{R}$
  (r,φ ... ebene Polarkoord.)

  a) $z=f(r,\varphi)=\underbrace{g(r)}_{\varphi \text{ kommt nicht explizit vor}}, r\in I\subseteq[0;\infty),\varphi\in[0;2\pi]$

  $\curvearrowright$ Rotationsflächen, Rotationsachse = z-Achse
  kartesisch: $r=\sqrt{x^2+y^2}\curvearrowright z=g(\sqrt{x^2+y^2})=:\underbrace{h(x^2+y^2)}_{\substack{\text{Kennzeichen einer kartesisch}\\ \text{gegebener Rotationsfläche}\\ \text{(um z-Achse)}}}$

  Beispiel2 $z=x^2+y^2=h(x^2+y^2)\quad(x=r\cos\varphi,y=r\sin\varphi)$
  $\curvearrowright x^2+y^2=r^2\curvearrowright Z=f(r,\varphi)=r^2=:g(r)\quad(0\leq\varphi\varphi2\pi$
  Rotationsparabolid $z=f(x,y)=x^2+y^2$

  b)
  $$z=f(r,\varphi)\underbrace{=}_{r \text{ kommt nicht explizit vor}}g(\varphi),r\in I_1\subseteq[0,\infty),\varphi\in I_2\subseteq\mathbb{R}$$

  $\curvearrowright$ Wendelflächen (Achse z-Achse)

  Beispiel 3 $z=f(r,\varphi)=\frac{h}{2\pi}\varphi=:g(\varphi)$
  $0\leq\varphi\leq4\pi,\quad0\leq r\leq R$
  Polar Darstellung:
  $x=r\cos\varphi,y=r\sin\varphi,z=\frac{h}{2\pi}\varphi\quad r\in[0;R],\varphi\in[0;4\pi]$

Bemerkung Polardarstellung bei expliziter Darstellung auf einfache Weise angebbar (als PArameter unabh. Variablen wählen).
z.B: $u=x,v=y$ bei kartes. Darst.
$u=r,v=\varphi$ bei Zylinderkoordinaten

3. Geometrische Darstellungsmöglichkeiten

   - Allgemeines Prinzip

     a) Kurvenscharen auf Flächen erzeugen (Koordinatenlinien $u=const.$ oder $v=const.$ bei Polardarstellung $r=const,\varphi=const$, oder $z=const.$ bei Zylinderkoordinaten $x=const,y=const.$ oder $z=const$ bei kartesischen Koordinaten.)

b) Projektionen einschließlich der Koordinatenachsen oder Koordinatenbox auf eine Bildebene $\curvearrowright$ 3D-Darstellung(„Schrägbild“)

- Spezialfall Höhenlinienbild, Karte für $z = f(x,y), (x,y) \in B$ dabei

  a) Höhenlinien zum Niveau (zur Höhe) c:

$$\{(x,y,z) | (x,y) \in B \wedge z = f(x,y) \wedge z = c\}$$

  (= Schnitt der Fläche $z = f(x,y)$ mit der Ebene $z = c \parallel x - y$-Ebene

  b) Projektion der Höhenlinien für ausgewählte Niveauwerte c in die $x - y-$Ebene $\curvearrowright$ Karte (analog Landkarte) (mit Angaben der Höhenwerte)

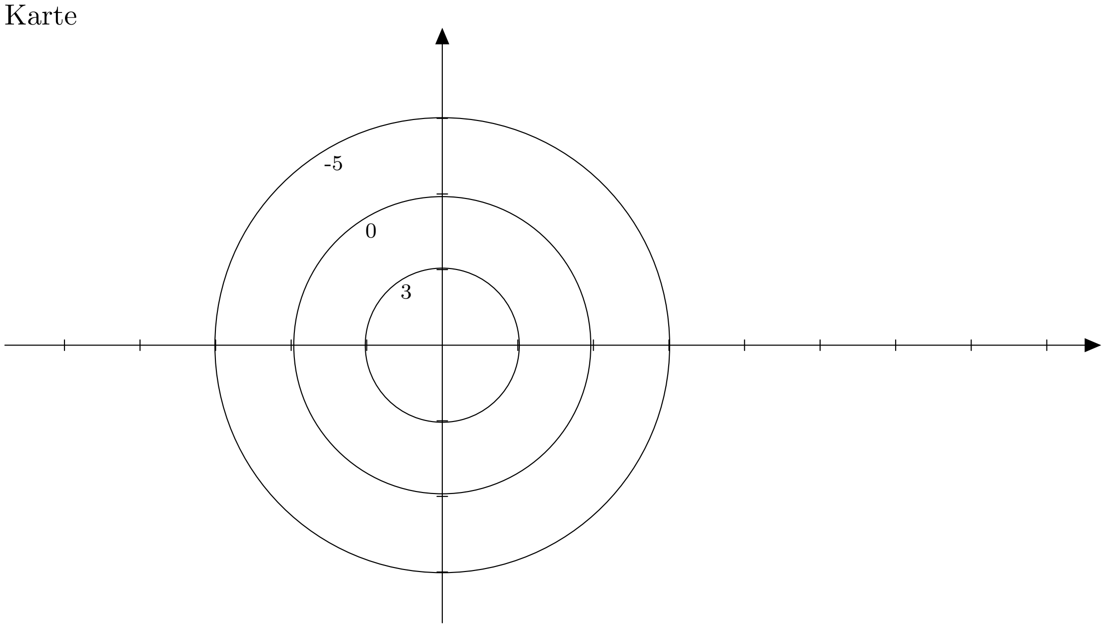
Beispiel 3 $z = f(x,y) = 4 - (x^2 + y^2)$
(Gestalt $z = f(x^2 + y^2) \curvearrowright$ Rotationsfläche, z-Achse = Rotationsachse)

- Höhenlinien zum Niveau $z = c$

$$c = 4 - (x^2 + y^2) \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4 - c$$

- Projektion in $x - y$-Ebene :
  $c < 4$ ... Kreis um 0, Radius $\sqrt{4-c}$
  $c = 4$ ... Punkt $0(0,0)$
  $c > 4$ ... leere Menge

- Karte



- Zylinderkoordinaten $(x^2 + y^2 = r^2) \curvearrowright z = 4 - r^2 = g(r), r \geq 0, \varphi \in [0; 2\pi]$

5.1.2 Grenzwerte,Stetigkeit

Einige Begriffe ($n = 2$, Fall $n > 2$ analog)

- ε-Umgebung eines Punktes $P_0(x_0, y_0), \varepsilon > 0$:

$$\underbrace{U_\varepsilon}_{\text{Kreisscheibe um } x_0, y_0}(x_0, y_0) = \{(x, y) : \underbrace{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}}_{\left\| \begin{pmatrix} (x - x_0) \\ y - y_0 \end{pmatrix} \right\|} < \varepsilon\}$$

- Umgebung $U(x_0, y_0)$: Jede Menge, für die ein $\varepsilon > 0$ existiert, mit $U_\varepsilon(x_0, y_0) \subseteq U(x_0, y_0) \subseteq \mathbb{R}^2$
- Innerer Punkt einer Menge M ... Punkt, für den M eine Umgebung ist.
- Häufigkeitspunkt P von M ... Punkt, für den in jeder ε-Umgebung mindestens ein von P verschiedener Punkt von M enthalten ist.
- Gebiet G ... zusammenhängende Menge, die nur aus inneren Punkten besteht
- Einfach zusammenhängendes Gebiet G ... Das Innerer jeder in G verlaufender geschlossener, doppelpunktfreien Kurve C, gehört ganz zu G
- Abgeschlossener Bereich (Abschließung eines Gebietes) $\overline{G}$: Vereinigung von G mit der Menge aller Häufungspunkte von G
- Bereich B Jede Menge, für die ein Gebiet G existiert mit $G \subseteq B \subseteq \overline{G}$ („Gebiet einschließlich Rand“)

Definition 1 Geg $z = f(x, y), (x, y) \in B = Db(f)$, ferner sei $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ und es existiert eine Umgebung $U(x_0, y_0)$ mit $U(x_0, y_0) \backslash \{(x_0, y_0)\} \subseteq Db(f)$
$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = a \quad :\Leftrightarrow$ Für jede Folge (x_n, y_n) mit $x_n, y_n) \in Db(f), (x_n, y_n) \neq (x_0, y_0) \wedge \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 \wedge \lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = a \tag{37}$$

Bemerkung Für jede Annäherung an (x_0, y_0) muss (37) gelten. Es genügt nicht die geradlinige Annäherung!

Definition 2 Es gelte $U(x_0, y_0) \subseteq Db(f)$; f heißt stetig an der Stelle (x_0, y_0), wenn

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

gilt. (vgl. Definition 3, Kapitel 2.2), „Grenzwert = Funktionswert„)

5.2 Partielle Ableitungen

Definition 1 Die Funktion $z = f(x,y), (x,y) \in B \subseteq \mathbb{R}^2$ heißt an der Stelle (x_0, y_0) partiell nach x diffbar, falls der Grenzwert

$$f_x(x_0, y_0) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

existiert.

Analog: f an der Stelle (x_0, y_0) partiell nach y diffbar, wenn

$$f_y(x_0, y_0) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

existiert.

Diskussion

1. Es sei $g(x) := f(x, y_0)$, d.h. y_0 fest. Dann ist $g'(x_0) = f_x(x_0, y_0)$ (gewöhnliche Ableitung einer Funktion einer (1!) Veränderlichen!) $\curvearrowright$ Ableitungsregeln aus Abschnitt 3.2. sind sinngemäß anzuwenden.

2. f heißt in Gebiet G partiell diffbar, wenn f für alle $(x_0, y_0) \in G$ partiell diffbar ist.

3. Analaog: Funktion mit mehr als 2 Veränderlichen $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, Variabeln $x_2, \ldots, x_n$ festhalten, nach x_1 diff. $\curvearrowright$ f_{x1} usw.

4. Bezeichnungen: $f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f = z_x = \frac{\partial z}{\partial x}, f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \ldots$

5. Höhere Ableitungen: $f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial}{\partial x} f) = \frac{\partial^2 f}{(\partial x)^2} = \ldots$

$$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial}{\partial x} f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

Satz von Schwarz Die Funktionen f, f_x, f_y, f_{xy} und f_{yx} seien in $U(x_0, y_0)$ erklärt. Ferner sei f_{xy} an der Stelle (x_0, y_0) stetig. Dann gilt

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$$

Beispiel 1

$$f(x,y) = \frac{x^2}{y^3} + y^2 - x, \ y \neq 0$$

$\frac{\partial}{\partial x}$: $f_x = \frac{2x}{y^3} - 1$

$\frac{\partial}{\partial y}$: $f_y = -\frac{3x^2}{y^4 + 2y}$

Satz 2 (verallgemeinerte Kettenregel)
Die Funktion $z = f(u, v), u = g(x, y)$ und $v = h(x, y)$ besitzen stetige partielle Ableitungen nach allen Variablen.
Dann ist die Funktion

$$z = f^*(x, y) := f(\underbrace{g(x, y)}_{u}, \underbrace{h(x, y)}_{v})$$

partiell nach x und y diffbar mit

$$z_x = z_u \cdot u_x + z_v \cdot v_x \quad z_y = z_u \cdot u_y + z_v \cdot v_y$$

Beispiel 2 $z = (x^2 + 3y^2)^{x+2y}$ ist nach x und y zu differenzieren.
Wir setzen $u = x^2 3y^2, v = x + 2y \curvearrowright z = u^v$

- $z_x = z_u \cdot u_x + z_v \cdot v_x = vu^{v-1} \cdot 2x + u^v \ln u \cdot 1$
  $= u^v(\frac{v}{u}2x + \ln u) = (x^2 + 3y^2)^{x+2y}(\frac{x+2y}{x^2+3y^2} \cdot 2x + \ln(x^2 + 3y^2))$
- $z_y = z_u \cdot u_y + z_v \cdot v_y = vu^{v-1} \cdot by + u^v \ln u \cdot 2$
  $= u^v(\frac{v}{u} \cdot by + 2 \ln u) = \dots$

Bemerkung Verallgemeinerung auf mehr als 2 Variablen:

$$z = f(u_1, u_2, \dots, u_m), u_i = g_i(x_1, \dots, x_n), i = 1, \dots, m$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_k} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial z}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \; k = 1, \dots, n)$$

Satz 3 (Satz über implizite Funktionen)
$F(x, y)$ sei in einer Umgebung von (x_0, y_0) stetig partiell nach x und y diffbar und es sei $F(x_0, y_0) = 0$ und $F_y(x_0, y_0) \neq 0$. Dann ist durch die Gleichung $F(x, y) = 0$ eindeutig eine Funktion $y = f(x), x \in U(x_0)$ erklärt mit $F(x, f(x))$ und es gilt $f'(x) = -\frac{F_x}{F_y}$ für $x \in U(x_0)$

Zum Beweis der Ableitungsformel:
$F(\underbrace{x}_{u}, \underbrace{y}_{v} = F(\underbrace{x}_{u}, \underbrace{f(x)}_{v} = 0 \quad |\text{Diff nach } x$
$F_u \cdot u_x + F_v \cdot v_x = F_x \cdot 1 + F_y \cdot f'(x) = 0 \curvearrowright f'(x) = -\frac{F_x}{F_y}$

Diskussion Mittels Satz 3 ist eine Kurvendiskussion für implizit gegebene Kurven $F(x, y) = 0$ möglich, ohne die Gleichung explizit auflösen zu müssen.
Für die 2. Ableitung ergibt sich:

$$f''(x) = -\frac{F_{xx} \cdot 1 + F_{xy} \cdot y')F_y - F_x(F_{yx} \cdot 1 + F_{yy} \cdot y')}{F_y^2}$$

$$\underbrace{\curvearrowright}_{y'=-\frac{F_x}{F_y}} f''(x) = \frac{F_{xx}F_y^2 - 2F_{xy} \cdot F_x F_y + F_{yy} \cdot F_x^2}{F_y^3}$$

Definition 2

- Geg. sei die Funktion $z = f(x,y), (x,y) \in B$.Die vektorwertige Funktion (Vektorfeld)
$$\operatorname{grad} f(x,y) := \begin{pmatrix} f_x(x,y) \\ f_y(x,y) \end{pmatrix}, (x,y) \in B$$
heißt Gradient von f an der Stelle (x,y)

- Allgemein $z = f(x_1, \dots, x_n)$, dann
$$\operatorname{grad} f := \begin{pmatrix} f_{x_1} \\ \vdots \\ f_{x_n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

Diskussion

1. Eigenschaften des Gradienten und Anwendung siehe Kapitel 5.4.1.
2. Umkehrung: Geg. Vektorfeld $\vec{v} = \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix}$, ges. Funktion F (Skalarfeld) mit $\vec{v} = \operatorname{grad} F$ (Ableitungen vorgeg, gesucht Funktion F,) F heißt Stammfunktion (Potential) von $\vec{v}$. Es existiert genau dann eine Stammfunktion $F(x,y)$ mit $F_x = P(x,y), F_y = Q(x,y)$, wenn in einem einfach zusammenhängenden Gebiet $G \subseteq \mathbb{R}^2$ die sogenannte Integrabilitätsbedingung $P_y = Q_x$ erfüllt ist.

5.3 Totale Differenzierbarkeit, Fehlerrechnung

Definition 1 Die Funktion $z = f(x,y)$ heißt an der Stelle (x_0, y_0) total differenzierbar, wenn es Konstanten α und β gibt, so dass für alle h und k die Zerlegung $f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = \alpha \cdot h + \beta \cdot k + R(h,k)$ mit $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \frac{R(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$ gilt.

Satz 1

1. f sei in $U(x_0, y_0)$ partiell nach x und y diffbar, die partielle Ableitung sei stetig in (x_0, y_0). Dann ist f an der Stelle (x_0, y_0) diffbar.
2. f sei an der Stelle (x_0, y_0) total diffbar. Dann ist f an der Stelle (x_0, y_0) partiell diffbar und es gilt
$$\alpha = f_x(x_0, y_0), \beta = f_y(x_0, y_0)$$

Definition 2 $df(x_0, y_0) := f_x(x_0, y_0) \cdot h + f_y(x_0, y_0) \cdot k$ heißt das zur Stelle (x_0, y_0) und den Zuwächsen $h = \Delta x = dx$ und $k = \Delta y = dy$ gehörende totale Differential von f. (die Summanden sind die partiellen Differentiale)
Schreibweise $df = f_x d_x + f_y d_y$

Diskussion

1. Es gilt $\Delta f := f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = d_f + \underbrace{R(h,k)}_{Restglied \to 0 \text{ wenn } (h,k)\to(0,0)}$

   $\curvearrowright \Delta f \approx df$ (falls $|h|, |k|$ klein)
   $\curvearrowright$ Fehlerrechnung: Absoluter Fehler $|\Delta f|$
   Es gilt $|\Delta f| \approx |df| \leq |f_x(x_0, y_0)| \cdot |\Delta x| + |f_y(x_0, y_0)| \cdot |\Delta y|$
   Für Fehlerschranken $s_p := \max |\Delta f|, s_x := \max |\Delta x|, s_y := \max |\Delta y|$ gilt

   $$s_f \approx |f_x(x_0, y_0)| \cdot s_x + |f_y(x_0, y_0)| \cdot s_y$$

   (Lineares Fehlerfortpflanzungsgesetz)

2. Geometrische Veranschaulichung

   - Δf ist der Zuwachs der Funktion, wenn (x, y) von (x_0, y_0) in $(x_0 + h, y_0 + k)$ übergeht
   - df ist der entsprechende Zuwachs der Tangentialebene (TE) an die Fläche $z = f(x, y)$ in Punkt (x_0, y_0, z_0) (TE= Linearisierung)

     Beispiel 1: (Fehlerrechnung)
     Zur Ermittlung der Entfernung d zweier (z.B. schwer zugänglicher) Punkte P und Q werden die Entfernungen p und q von einem 3. Punkt S sowie der Winkel $\varphi = \measuredangle PSQ$ gemessen.

5.4 Weitere Begriffe, Anwendungen

Definition 1 $f(x, y)$ besitze in (x_0, y_0) stetige partielle Ableitungen 1. Ordnung. Für jeden Vektor

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = |s|(\cos\alpha \cdot \vec{i} + \sin\alpha \cdot \vec{i}$$

heißt

$$\frac{\partial f}{\partial s}(x_0, y_0) := \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h\cos\alpha, y_0 + h\sin\alpha) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Richtungsableitung von f an der Stelle (x_0, y_0) in Richtung $\vec{s}$ (bzw. in Richtung $\vec{s^0}$, in Richtung α)

Diskussion

1. $\frac{\partial f}{\partial s}(x_0, y_0)$ ist der Flächenanstieg in Richtung $\vec{s}$ (genauer, der Anstieg der Schnittkurve der Fläche $z = f(x, y)$ mit der Ebene durch $(x_0, y_0, 0)$ und $(x_0+s_1, y_0+s_2, 0)$, die senkrecht zur $x - y-$Ebene steht.

2. Speziell

   $$\vec{s} = \vec{i}, \quad \text{d.h. } \alpha = 0 \curvearrowright \frac{\partial f}{\partial s} = f_x$$
   $$\vec{s} = \vec{i}, \quad \text{d.h. } \alpha = \frac{\pi}{2} \curvearrowright \frac{\partial f}{\partial s} = f_y$$

Satz 1 (Berechnung der Richtungsableitung)
Es gilt

$$\frac{\partial f}{\partial s}(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0) \cdot \cos\alpha + f_y(x_0, y_0) \cdot \sin\alpha$$
$$= \frac{f_x(x_0, y_0) \cdot s_1 + f_y(x_0, y_0) \cdot s_2}{\sqrt{s_1^2 + s_2^2}} = \left(\operatorname{grad} f(x_0, y_0), \vec{s^0}\right)$$

Satz 2 (Eigenschaften des Gradienten im Falle $z = f(x, y)$)
Der Vektor $\operatorname{grad} f(x_0, y_0)$

- steht senkrecht auf (der Proj) der Höhenlinie $f(x, y) = c$ zum Niveau $z = c = f(x_0, y_0)$ (in die $x - y$-Ebene) und
- zeigt in Richtung des stärksten Funktionszuwachses (Flächenanstiegs) Dieser ergibt zu $\max\limits_{\vec{s}} \frac{\partial f}{\partial s}(x_0, y_0) = |\operatorname{grad} f(x_0, y_0)|$

Diskussion

1. Fall $n = 3$: Funktion $u = f(x, y, z)$. Analog zu Satz 3 steht der Vektor $\operatorname{grad} f(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ senkrecht auf (der Projektion) Niveaufläche $f(x, y, z) = c$ zum Niveau $u = c = f(x_0, y_0, z_0)$ (in $\mathbb{R}^{\not\models}$) und zeigt in Richtung des stärksten Funktionszuwachses; z.B. Erdatmosphäre, … u = Luftdruck(idealisiert), Niveauflächen = Kugelflächen, Niveau mit wachsenden Radius exponentiell abnehmend $\curvearrowright$ Gradient zeigt in Richtung Erdmittelpunkt.

2. Anwendung Tangentialebenengleichungen
   - TE an die Fläche $F(x, y, z) = 0$ im Punkt (x_0, y_0, z_0)

     $$F_x(x_0, y_0, z_0) \cdot (x - x_0) + F_y(\dots) \cdot (y - y_0) + F_2(\dots) \cdot (z - z_0) = 0 \qquad (38)$$

     Denn: Fläche $F(x, y, z) = 0$ ist Niveaufläche von $u = F(x, y, z)$ zum Niveau $u = 0 \curvearrowright \vec{n} = \operatorname{grad} F(x_0, y_0, z_0)$ ist ein Normalenvektor der Fläche und damit der TE $\curvearrowright$

     $$(\vec{n}, \vec{r} - \vec{r_0}) = 0, \text{ vgl. 1.5.5.5., d.h. } \left(\begin{pmatrix} F_x(x_0, y_0, z_0) \\ F_y(x_0, y_0, z_0) \\ F_z(x_0, y_0, z_0) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix}\right) = 0$$

   - speziell $z = f(x, y) \curvearrowright$ TE in (x_0, y_0, z_0)

     $$z = z_0 + f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) \qquad (39)$$

     Denn: $z = f(x, y) \Leftrightarrow 0 = f(x, y) - z =: F(x, y, z)$
     $\curvearrowright F_x = f_x, F_y = f_y, F_z = -1$ einsetzen in (38) ergibt (39).

5.4.1 Lokale Extrema (ohne Nebenbedingungen) von Funktionen zweier Veränderlicher

Defnition 2 $f(x,y)$ heißt in (x_0,y_0) lokal $\left\{\begin{array}{c}\text{maximal}\\ \text{minimal}\end{array}\right.$, wenn es für eine Umgebung $U(x_0,y_0)$ gibt, so dass für alle $(x,y)\in U(x_0,y_0)\backslash\{(x_0,y_0)\}$ gilt $\left\{\begin{array}{lcl} f(x,y) & < & f(x_0,y_0)\\ f(x,y) & > & f(x_0,y_0)\end{array}\right.$

Diskussion Anschaulich TE $\parallel$ $x-y-$Ebene
Bezeichnungen:

- (x_0,y_0) ... Extremstelle
- $z_0 = f(x_0,y_0)$ ... Extremstelle
- (x_0,y_0,z_0) ... Extrempunkt

TE ist Extrempunkt horizontal
$\curvearrowright$ Funktionsanstieg (Richtungsableitung) für alle Richtungen $=0$, also auch $f_x(x_0,y_0)=0$ und $f_y(x_0,y_0)=0$ $\curvearrowright$

Satz 3 (notwendige Bedingung für Vorliegen lokaler Extrema) $f(x,y)$ sei an der Stelle (x_0,y_0) lokal extremal und diffbar nach x und $y \Rightarrow (f_x(x_0,y_0)=0)\wedge(f_y(x_0,y_0)=0)$

Satz 4 (hinreichende Bedingung für lokale Extrema)

1. $f(x,y)$ besitze in $U(x_0,y_0)$ stetige partielle Ableitungen bis zur 2. Ordnung
2. Die notwendige Bedingung $(f_x(x_0,y_0)=0)\wedge(f_y(x_0,y_0)=0)$ sei erfüllt

Dann gilt mit $\Delta(x,y) := f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy}\\ f_{yx} & f_{yy}\end{vmatrix}$
$\Delta(x_0,y_0)>0 \Rightarrow f$ in (x_0,y_0) lokal extremal und zwar

$$\begin{array}{lll} \text{lokal maximal} & \text{falls zusätzlich} & f_{xx}(x_0,y_0)<0\\ \text{lokal minimal} & \text{falls zusätzlich} & f_{xx}(x_0,y_0)>0\end{array} \tag{40}$$

Diskussion

1. $\Delta(x_0,y_0)>0 \Rightarrow f_{xx}(x_0,y_0)$ und $f_{yy}(x_0,y_0)$ sind beide positiv oder beide negativ, daher kann in Zusatzbedingung (40) anstelle f_{xx} auch f_{yy} stehen.
2. Allgemeine Vorgehensweise zur Bestimmung der lokalen Extremstellen von $z = f(x,y)$
   a) Gleichungssystem $\begin{array}{c} f_x=0\\ f_y=0\end{array}$ lösen (notwendige Bedingung)
   $\curvearrowright$ extremwertverdächtige Stellen (stationäre Stellen) $P_E(x_E,y_E)$

b) Für diese Stellen $P_E(x_E, y_E)$ Diskriminante Δ berechnen

   i. Fall $\Delta(x_E, y_E) > 0 \Rightarrow$ Extremum, $f_{xx}(x_E, y_E) \begin{cases} < 0 & \dots \text{Max} \\ > 0 & \dots \text{Min} \end{cases}$

   ii. Fall $\Delta(x_E, y_E) = 0 \Rightarrow$ gesonderte Untersuchung notwendig (vgl. Diskussion 4)

   iii. Fall $\Delta(x_E, y_E) < 0 \Rightarrow$ kein Extremum sondern Sattelstelle (im engeren Sinne), vgl. Diskussion 3

   Allgemein: Stationäre Stellen, die keine Extremstellen sind, werden als Sattelstellen (im weiteren Sinne) bezeichnet.

Beispiel 2 $z = f(x, y) = 2xy^2 - 2x^2 - y^2 + 4$

$$f_x = 2y^2 - 4x = 0$$

$$f_y = 4xy - 2y = 0$$

$(f_y = 4xy - 2y = 0) \Leftrightarrow 2y(2x - 1) = 0$

1. Fall $y = 0, (f_x = 2y^2 - 4x = 0) \curvearrowright x = 0 \curvearrowright \underline{\underline{P_1(0; 0)}}$

2. Fall $x = \frac{1}{2}, (f_x = 2y^2 - 4x = 0) \curvearrowright 2y^2 - 2 = 0 \curvearrowright y^2 = 1 \curvearrowright y = \pm 1 \curvearrowright$ $\underline{\underline{P_2(\frac{1}{2}; -1), P_3(\frac{1}{2}; 1)}}$ (stationäre Stellen P_{1-3})

   $f_{xx} = -4, f_{yy} = 4x - 2, f_{xy} = 4y \curvearrowright \Delta(x, y) = (-4) \cdot (4x - 2) - (4y)^2$

   $P_1 : \left. \begin{array}{r} \cdot\Delta(0, 0) = (-4) \cdot (-2) - 0^2 = 8 > 0 \\ f_{xx}(0, 0) = -4 < 0 \end{array} \right\} \curvearrowright \max(0; 0), z_{\max} = 4$

   $P_2 : \Delta(\frac{1}{2}; -1) = (-4) \cdot 0 - 16 < 0 \curvearrowright$ keine Extrema, Stattelstelle (im erweiterten Sinne)

   $P_3 : \Delta(\frac{1}{2}; 1) = (-4) \cdot 0 - 16 < 0 \curvearrowright$ keine Extrema, Stattelstelle (im engeren Sinne)

3. Sattelstellen im engeren Sinne (i.e.S.) anschaulich

4. Im Falle $\Delta(x_E, y_E) = 0$ ist eine gesonderte Untersuchung notwendig, z.B: Einschränkung des Diff.-Bereiches auf Kurven, die durch P_E verlaufen. Genau dann, wenn all diese Einschränkungen ein Max. bei P_E aufweisen, ist P_E eine Max.-Stelle, analog beim Minimum.

   Beispiel 3 $z = f(x, y) = x^4 - y^4$

   $\left. \begin{array}{r} f_x = 4x^3 = 0 \\ f_y = -4y^3 = 0 \end{array} \right\} \curvearrowright x = 0, y = 0 \curvearrowright P_E(0; 0)$

   $f_{xx} = 12x^2, f_{yy} = -12y^2, f_{xy} = 0 \curvearrowright \Delta(P_E) = 0$

   - Einschränkung auf Gerade $x = 0 \curvearrowright z = -y^4$

- Einschränkung auf Gerade $y = 0 \curvearrowright z = x^4$

$\curvearrowright$ keine Extremstelle

5. $z = f(x_1, \ldots, x_n), \vec{x} \in B \subseteq \mathbb{R}^n$
   - notwendige Bedingung für Extrema $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \quad i = 1, \ldots, n) \curvearrowright$ mögl. Extremstellen (stationäre Stellen) $\vec{x}_E$
   - Hinreichende Bedingung

   Definition HESSE-Matrix $\underline{H}(\vec{x}) := \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{i,j=1}^n \ldots (n,n)$-Matrix

   a) Alle Eigenwerte von $\underline{H}(\vec{x}_E)$ sind positiv $\curvearrowright \vec{x}_E \ldots$ lokales Minimum.

   b) Alle Eigenwerte von $\underline{H}(\vec{x}_E)$ sind negativ $\curvearrowright \vec{x}_E \ldots$ lokales Maximum.

   c) Es gibt positive und negative Eigenwerte $\curvearrowright \vec{x}_E \ldots$ Sattelstelle (kein Extremum)

   d) Wenigstens ein EW $= 0 (\leftrightarrow \det \underline{H}(\vec{x}_E) = 0) \ldots$ gesonderte Untersuchung notwendig (außer, es gilt gleichzeitig Fall c))

   Fall $n = 2 \quad \det(\underline{H}(\vec{x}_E) - \lambda E) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \underbrace{\curvearrowright}_{\lambda=0}$ (char. Polynom)

   $\det \underline{H}(\vec{x}_E) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 = \Delta(\vec{x}_E), \lambda_1 + \lambda_2 = f_{xx}(\vec{x}_E) + f_{yy}(\vec{x}_E)$ Damit sind die Bedingungen unter der HESSE-Matrix Definition identisch mit der Fallunterscheidung in Diskussion 2

5.4.2 Lokale Extrema (mit Nebenbedingungen)

Problem Gesucht sind lokale Extrema von $z = f(x, y)$ unter der Nebenbedingung $g(x, y) = 0$, d.h.

- Fläche $z = f(x, y)$ schneiden mit Zylinderfläche $g(x, y) = 0 \curvearrowright$ Schnittkurve C
- Gesucht sind Stellen (x_0, y_0) auf der Kurve $g(x, y) = 0$ an denen extremale Höhe über der $x - y-$Ebene erreicht wird.

Diskussion

1. $g(x, y) = 0$ ist auffassbar als

   a) Kurve K in der $x - y$-Ebene, $K = \{(x, y) | g(x, y) = 0\}$

   b) Zylinderfläche $\perp x - y$-Ebene: $\{(x, y, z) | g(x, y) = 0\}$

   (Zylinderfläche wird allgemein erzeugt von einer ebenen Kurve K, die längs einer nicht in dieser Ebene liegenden Gerade g verschoben wird.

2. Falls $g_y \neq 0 \curvearrowright g(x,y)$ auflösbar nach $y \curvearrowright y = y(x)$, damit $z = f(x, y(x)) \to$ extr., notwendige Bedingung
$$\frac{dz}{dx} = f_x + f_y \cdot y' = 0 \tag{41}$$
   - Außerdem gilt $g(x, y(x)) = 0 \curvearrowright$
$$g_x + g_y \cdot y' = 0 \tag{42}$$
   - Mit $\vec{a} := \begin{pmatrix} 1 \\ y' \end{pmatrix} \neq \vec{0}, \vec{b} := \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix}$ und $\vec{c} := \begin{pmatrix} g_x \\ g_y \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ gilt $(\vec{a}, \vec{b}) = 0$ Skalarprodukt(41), $(\vec{a}, \vec{c}) = 0$ (42)
     $\curvearrowright \vec{b} = \alpha \cdot \vec{c} \underbrace{\curvearrowright}_{-\alpha =: \lambda} \vec{b} + \lambda \vec{c} = \vec{c} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{matrix} f_x + \lambda g_x = 0 \\ f_y + \lambda g_y = 0 \end{matrix}$

   Fall $g_x \neq 0$ analog $\curvearrowright$ Lagrange-Methode

   a) Lagrange-Funktion
$$F(x, y, \lambda) := f(x, y) + \lambda g(x, y)$$
      mit einer Hilfsgröße λ bilden, dabei beachten: Nebenbedingung muss in der Form $g(x, y) = 0$ (implizit) [sein]!

   b) Notwendige Bedingung: Es sei (x_E, y_E) eine lokale Xtremstelle von $z = f(x, y)$ unter der NB $g(x, y) = 0$. f und g besitzen in $U(x_E, y_E)$ stetige partielle Ableitungen 1. Ordnung und es gelte
$$\operatorname{grad} g(x_E, y_E) \neq \vec{0} \tag{43}$$
      (d.h. $g_x(x_E, y_E) \neq 0 \vee g_y(x_E, y_E) \neq 0 \curvearrowright$ NB auflösbar nach x bzw. y)
      Dann gibt es eine Lösung des Gleichungssystems
$$\begin{aligned} F_x &= 0 \\ F_y &= 0 \\ F_\lambda &= 0 \end{aligned} \tag{44}$$
      der Gestalt $(x_E, y_E, \underbrace{\lambda_E}_{\text{Hilfsgröße}})$, d.h. die Lösungen von (44) liefern stationäre Stellen (mögliche Extremstellen) (x_E, y_E)

      Sonderfall: Eventuell vorhandene Stellen (x_0, y_0) mit $g_x(x_0, y_0) = g_y(x_0, y_0) = 0$ (sogenannte singuläre Stellen der Kurve $g(x, y) = 0$ können Extremstellen sein, ohne sich aus (44) zu ergeben, sie müssen daher gesondert untersucht werden

   c) Untersuchung der stationären Stellen z.B.
      - mittels Höhenlinienbild von $z = f(x, y)$
      - oder mittels geometrischen oder physikalischen Überlegungen
      - meist Verzicht auf Untersuchung der auch hier existierenden hinreichenden Bedingung

Beispiel 4 $z = f(x,y) = x^2 + y^2 \to$ extremum unter der NB: $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$

a) $F(x,y,\lambda) = \underbrace{x^2+y^2}_{f(x,y)} + \lambda(\underbrace{x^2 + \frac{y^2}{4} - 1}_{g(x,y)})$

b)
$$\begin{array}{rl|r} F_x = 2x + 2\lambda x = 0 & & (1) \curvearrowright 2x(1+\lambda) = 0 \\ F_y = 2y + \frac{1}{2}\lambda y = 0 & & (2)\ 1.\ \text{Fall } x = 0, (3): \frac{y^2}{4} - 1 = 0 \\ F_\lambda = x^2 + \frac{y^2}{4} - 1 = 0 & & (3) \curvearrowright y = \pm 2, (2): \lambda = -4 \\ & & \curvearrowright P_1(0;-2), P_2(0;2) \end{array}$$

2. Fall: $\lambda = -1$, $\left.\begin{array}{l} (2) \curvearrowright 2y - \frac{1}{2}y = 0 \curvearrowright y = 0 \\ (3) \curvearrowright x^2 - 1 = 0 \curvearrowright x = \pm 1 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{c} P_3(-1;0) \\ P_4(1;0) \end{array}$

stationäre Stellen	$P_1(0;-2)$	$P_2(0;2)$	$P_3(-1;0)$	$P_4(1;0)$
Funktionswert z	4	4	1	1

(Sonderfall $g_x = 2x = 0, g_y = 2y = 0 \curvearrowright x = 0, y = 0 \curvearrowright g(0,0) \neq 0 \curvearrowright$ keine singulären Stellen sind vorhanden

c) Höhenlinien von $f : x^2 + y^2 = C$ (Kreise um 0 mit Radius $\sqrt{C}$, falls $C > 0$)
NB: Ellipse $\frac{x^2}{1^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$
$\curvearrowright P_1, P_2 \ldots$ Stellen lokaler Maxima, $z_{\max} = 4$
$\curvearrowright P_3, P_4 \ldots$ Stellen lokaler Minima, $z_{\min} = 1$

Bemerkungen:

i. Für Funktionen $f(x_1, \ldots, x_n)$ mit $n > 2$ Veränderlichen und $k < n$ NB $g_i(x_1, \ldots, x_n)$ analogen Vorgehen: LAGRANGE-Funktion

$$F(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_k) = f(x_1, \ldots, x_n) + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j g_j(\ldots) \text{ usw.}$$

$$\text{Bedingung (1) hier: rang} \begin{pmatrix} (\frac{\partial g_j}{\partial x_j}) & i = 1, \ldots, n \\ & j = 1, \ldots, k \end{pmatrix} = k$$

ii. Falls NB eindeutig nach k Variablen auflösbar sind, dann Rückführung auf Problem mit $(n-k)$ Variablen ohne NB möglich.

Vorsicht im Beispiel 4: $y^2 = 4(1-x^2) \curvearrowright y = \pm\sqrt{4(1-x^2)}$
Einsetzen $\curvearrowright z = 4 - 3x^2, \frac{dz}{dx} = -6x = 0 \curvearrowright x_E = 0 \curvearrowright$ nur P_1, P_2

5.5 Weitere Begriffe, Anwendungen

5.6 Richtungsableitung, Tangentialebenen

Beispiel 5 Bei einem Stochastik-Problem (vgl. 3. Sem) ergibt sich die Aufgabe, die Zahl 1 so in n Summanden a_j zu zerlegen, dass die Summe der Quadrate minimal wird.

Mathematisches Modell:

$$s = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \to \text{ min. unter der}$$

$$\text{NB: } a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1, a_i \in \mathbb{R}(i = 1, \ldots, n)\ n \geq 2$$

1. Lagrange-Funktion

$$F(a_1, \ldots, a_n, \lambda) = a_1^2 + \cdots + a_n^2 + \lambda(a_1 + \cdots + a_n 1 - 1)$$

2. Notwendige Bedingung

$$\frac{\partial F}{\partial a_i} = 2a_i + \lambda = 0(i = 1, \ldots, n)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = a_1 + \cdots + a_n - 1 = 0$$

$$\curvearrowright a_i = -\frac{\lambda}{2}(i = 1, \ldots, n) \curvearrowright a_1 = a_i = \cdots = a_n =: a$$

$$\curvearrowright na - 1 = 0 \curvearrowright a = \frac{1}{n}, \text{d.h. } \underline{\underline{a_1 = a_2 = \cdots = a_n = \frac{1}{n}}} \quad (\lambda = -2a_i = \underline{\underline{-\frac{2}{n}}})$$

3. Minimum ist klar: S kann nicht beliebig klein werden , aber beliebig groß, daher existiert ein Minumum. Da die notwendige Bedingung nur eine Lösung besitzt, ist dies die gesuchte Min.-Stelle.

6 Integralrechnung für Funktionen von mehreren reellen Variablen

6.1 Integrale über ebene Bereiche

6.1.1 Begriff

- Geg.
  1. Beschränkter, abgeschlossener Bereich $B \subseteq \mathbb{R}^2$
  2. Fläche $z = f(x, y) \geq 0$, f stetig

  Ges: Volumen V des Körpers K unter der Fläche über dem Bereich B
  *) Zum vergleich fläche kaum entfalten, wenn der Rand von B durch Schnitt der Fläche $z = f(x, y)$ mit der $x - y$-Ebene entsteht.

- Zerlegung von B in Teilbereich Δb_i
  $\curvearrowright$ Zerlegung von K in Säulen mit dem Volumen ΔV_i
  $\curvearrowright V = \sum\limits_i \Delta V_i \approx \sum\limits_i (\xi_i, \eta_i) \cdot \Delta b_i$

- f stetig, Verfeinerung, Grenzübergang $\curvearrowright$
  Grenzwert $:= V$ existiert unabhängig von der Zerlegungsfolge
  Schreibweise
  $$V = \iint\limits_B f(x,y)\,db \qquad \ldots \text{Bereichsintegral}$$

  Diskussion

  1. Einteilung von B durch achsenparallele Geraden:
     $db = dxdy \curvearrowright$
     Schreibweise
     $$\iint\limits_B f(x,y)\,db = \iint\limits_B f(x,y)\,dxdy$$
  2. Unabhängig von der geometrische Bedeutung wird das Bereichtsintegral auch für Funktionen mit negativen Funktionswerten erklärt.

6.1.2 Reduktion auf Doppelintegrale

Geg. seien zwei stetige Funktionen $\varphi_1(x)$ und $\varphi_2(x)$ mit $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$ für $x \in [a;b](a < b)$
Der Bereich
$$B := \{(x,y)|a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$$
heißt Normalbereich bzgl. der x-Achse (normal=orthogonal=senkrecht
Dann gilt:
$$\iint\limits_B f(x,y)\,db = \int\limits_{x=a}^{b} \left(\int\limits_{y=\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$

Diskussion

1. Normalbereich bzgl. x-Achse wird links und rechts begrenzt von Koordinatenlinien $x = a, x = b$. Diese Begrenzungen können zu Punkten entarten.
   Das Intervall $[a,b]$ ergibt sich durch Orthogonalprojektion von B auf die x-Achse. Daraus ergeben sich die stets konstanten Grenzen für die äußere Integration (x läuft von a bis b!)
   Dagegen läuft y in Abhängigkeit von x nur von $\varphi_1(x)$ bis $\varphi_2(x)$ (und nicht von c bis d!).
   $\rightarrow$ Grenzen für die innere Integration hängen im allgemeinen von der äußeren Integrationsvariablen ab
2. Analog: Geg. $\psi_1(y) \leq \psi_2(y)$ für $y \in [c;d]$ Normalbereich bzgl. y-Achse
   $$B = \{(x,y)|c \leq y \leq d, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}$$

Dann
$$\iint\limits_B f(x,y)\,db = \int\limits_{y=c}^{d} \left(\int\limits_{x=\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx \right) dy$$
(horizontale Grenzen für y durch Projektion von B auf y-Achse)

3. Oft sich beide Varianten möglich (vgl. Beispiel 1), manchmal ist Zerlegung notwendig:
$$\iint\limits_B \cdots = \iint\limits_{B_1} \cdots + \iint\limits_{B_2} \cdots$$

4. Außen und innere konstante Grenzen $\Leftrightarrow$ B ist achsenparralleles) Rechteck (in diesem Falle ist die Integrationsreihenfolge egal)

Beispiel 1 Zu berechnen ist $I = \iint\limits_B \frac{x}{y}\,db$, dabei werde B begrenzt von $y = x^2, x = 2$ und $y = 1$ (Volumen unter einer Wendelfläche)

- Skizzen $var1 : B = \{(x,y)|1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq x^2\}$ (Projektion auf x-Achse)
  $var2 : B = \{(x,y)|1 \leq y \leq 4, \sqrt{y} \leq x \leq 2\}$ (Projektion auf y-Achse)
- Berechnung von I als Doppelintegral (z.B. nach Var 2)
  $I = \int\limits_{y=1}^{4} (\int\limits_{x=\sqrt{4}^2} \frac{x}{y}\,dx)dy = \int\limits_{y=1}^{4} \left[\frac{x^2}{2y}\right]_{x=\sqrt{y}}^{2} dy$

6.1.3 Anwendungen

Volumen V unter $z = f(x,y) \geq 0$ über B	$V = \iint\limits_B f(x,y)\,db$
Flächeninhalt $[B]$ von B	$[B] = \iint\limits_B db$ (Integrand = 1)
(geometr.) Schwerpunkt $S(x_s, y_s)$ von B	$x_s = \frac{1}{[B]} \iint\limits_B x\,db, y_s = \frac{1}{[B]} \iint\limits_B y\,db$
Integralmittelwert von f in B	$m = \frac{1}{[B]} \iint\limits_B f(x,y)\,db$

6.1.4 Koordinatentransformation

- Ziel: Durch Einführung neuer Koordinaten (z.B: u und v) möglichst einfache Grenzen erzeugen.
  Günstig ist es, wenn möglichst viele Begrenzungen von B auf Koordinatenlinien liegen. ($u = const., v = const.$)
- Besonders wichtig: Polarkoordinaten $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$
  Koordinatenlinien $r = const \curvearrowright$ Kreislinien um 0)
  $\varphi = const. \curvearrowright$ Strahlen von 0 aus)

Anwendung falls B ein Kreisbereich, Kreisring, Kreissektor usw. mit Mittelpunkt 0 ist. Das Bereichselement db ist ebenfalls durch die neuen Koordinaten ausdrückbar.
Man erhält:

$$db = r\,dr\,d\varphi \text{ (Herleitung s. allg. Koord.transf.)}$$

Beispiel 2 Gesucht Volumen V des Körpers, bergrenzt vom Rotationsparabolid $z = 4-(x^2+y^2)$ und der $x-y$-Ebene ($z=0$)

- Schnittkurve $x^2+y^2=4$ (Kreis in $x-y$-Ebene)
- B in Polarkoordinaten $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi : 0 \le r \le 2, 0 \le \varphi \le 2\pi \curvearrowright V = \iint\limits_B (4-(x^2+y^2))db = \int\limits_{r=0}^{2}\int\limits_{\varphi=0}^{2\pi}(4-r^2)\underbrace{r\,d\varphi dr}_{db}$
  $= \int\limits_{r=0}^{2}(4r-r^3)\underbrace{[\varphi]_0^{2\pi}}_{2\pi}dr = 2\pi\left[2r^2-\frac{r^4}{4}\right]_0^2 = \underline{\underline{8\pi}}$

Allg. Koordinatentransformation

$$x = x(u,v), y = y(u,v) \tag{45}$$

Definition 1

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} =: \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}$$

heißt Funktionaldeterminante der Transformation (45)
Es ergibt sich für das Bereichselement

$$db = |\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}|\,du\,dv$$

Falls $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0$ erhält man durch (45) eine umkehrbar eindeutige Abbildung $(x,y) \in B \leftrightarrow (u,v) \in B'$. Für das Bereichsintegral gilt in den neuen Koordinatne:

$$I = \iint\limits_B f(x,y)\,db = \iint\limits_{B'} f(x(u,v),y(u,v)) \cdot |\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}|\,du\,dv$$

Diskussion

- Veranschaulichung der Formel für das Bereichselement: Koordinatenlinien $u = const, v = const$
  Linearisierung $\Delta b \approx db$
  $\curvearrowright db = |\vec{r}_u du \times \vec{r}_v dv| \quad (du > 0, dv > 0)$
  $= |\begin{vmatrix} \vec{i} & x_u & x_v \\ \vec{j} & y_u & y_v \\ \vec{k} & 0 & 0 \end{vmatrix}|\,dudv = |\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}\vec{k}|dudv = |\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}||dudv$

Funktionaldeterminante bei Polarkoordinaten $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = \begin{vmatrix} x_r & x_\varphi \\ y_r & y_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = \underline{\underline{r}}$$

$\curvearrowright db = r dr d\varphi$ (s.o.)

Beispiel 3 Gesucht sei der geometrische Schwerpunkt S der Halbkreisfläche begrenzt von $x^2 + y^2 = R^2 (y \geq 0)$ und $y = 0$
Polarkoordinaten: $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$
Grenzen: $0 \leq r \leq R, 0 \leq \varphi \leq \pi$

- $[B] = \iint\limits_B db = \int\limits_{r=0}^{R} \underbrace{\int\limits_{\varphi=0}^{\pi} r\, d\varphi}_{r\cdot\pi}\, dr = \pi \int\limits_{r=0}^{R} r\, dr$
  $= \pi \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^R = \underline{\underline{\frac{1}{2}\pi R^2}}$
- $x_s = 0$ (aus Symmetriegründen)
  (Rechnung: $\iint\limits_B x\, db = \int\limits_{r=0}^{R} \int\limits_{\varphi=0}^{\pi} \underbrace{r\cos\varphi}_{x} \cdot \underbrace{r\, d\varphi\, dr}_{db}$
  $= \int\limits_{r=0}^{R} r^2 \underbrace{[\sin\varphi]_{\varphi=0}^{\pi}}_{0} dr = 0 \curvearrowright x_s = 0$
- $\iint\limits_B y\, db = \int\limits_{r=0}^{R} \int\limits_{\varphi=0}^{\pi} \underbrace{r\sin\varphi}_{y} \underbrace{r d\varphi dr}_{db} = \int\limits_{r=0}^{R} r^2 \cdot \underbrace{[-\cos\varphi]_{\varphi=0}^{\pi}}_{2} dr$
  $= 2 \cdot [\frac{r^3}{3}]_0^R = \underline{\underline{\frac{2}{3}R^3}}$
  $\curvearrowright y_s = \frac{\frac{2}{3}R^3}{\frac{\pi}{2}R^2} = \underline{\underline{\frac{4}{3\pi}R}} = \underline{\underline{0,424\, R}} \curvearrowright \underline{\underline{S\left(0|\frac{4R}{3\pi}\right)}}$

Beispiel 4 Flächeninhalt innerhalb der Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
Polardarstellung $x = a\cos v, y = b\sin v, v \in [0; 2\pi]$

- elliptische Polarkoordinaten $x = x(u,v) = a \cdot u\cos v, y = y(u,v) = b \cdot u\sin v$
  Koordinatenlinien $u = 1$: Ellipse
  $0 \leq u < 1 \curvearrowright$ Inneres der Ellipse
  $\curvearrowright B = \left\{ (x,y) | \begin{array}{ll} x = au\cos v & u \in [0;1] \\ y = bu\sin v & v \in [0;2\pi] \end{array} \right\}$
- Funktionaldeterminante: $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\cos v & -au\sin v \\ b\sin v & bu\cos v \end{vmatrix}$
  $= abu\cos^2 v + abu\sin^2 v = abu$

$\curvearrowright db = abu\,du\,dv$
$\curvearrowright [B] = \iint\limits_B = \cdots = \pi ab$

6.2 Oberflächenintegrale

6.2.1 Flächen im Raum

Zur Erinnerung:

- x, y, z … kartesisches Koordinatensystem
- r, φ, z … Zylinderkoordinaten (r-Abstand zur z-Achse)
- r, φ, ϑ … Kugelkoordinaten (r-Abstand vom Ursprung)

Flächendarstellungen

- $z = f(x, y)$ … explizite kartesische Darstellung
- $F = (x, y, z) = 0$ implizite kartesische Darstellung
- $x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v)$ … Parameterdarstellung
- $z = f(r, \varphi)$ … explizite Zylinderkoordinatendarstellung, speziell
  - $z = f(r, \varphi) = g(r), r \in I \subseteq [0; \infty), \varphi \in [0; 2\pi]$ Rotationsflächen um die z-Achse
  - $z = f(r, \varphi) = g(\varphi)$ … Wendelflächen

6.2.2 Oberflächenelement, Berechnung und Anwendungen

- Geg. Fläche

$$\vec{\vec{=}} \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix}, (u, v) \in B$$

  , analog zu ebenen Bereichsintegralen ergibt sich

$$dF = |\vec{r}_u \times \vec{r}_v|\,du\,dv$$

  … (skalares) Oberflächenelement

- Oberflächenintegral (über ein Skalarfeld)

$$\iint\limits_F f(x, y, z)\,dF = \iint\limits_B f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \cdot |\vec{r}_u \times \vec{r}_v|\,du\,dv$$

- Anwendung(analog ebene Bereichsintegrale)

$[F]\ldots$ Flächeninhalt von F	$[F]=\iint\limits_F dF$
geometrischer Schwerpunkt $S(x_s,y_s,z_s)$	$x_s=\frac{1}{[F]}\iint\limits_F x\,dF, y_s=\frac{1}{[F]}\iint\limits_F y\,dF, z_s=\frac{1}{[F]}\iint\limits_F z\,dF$
Integral-Mittelwert von f auf F	$m=\frac{1}{[F]}\iint\limits_F f(x,y,z)\,dF$

Berechnung von dF für spezielle Flächendarstellungen

- $z=f(x,y)\curvearrowright$ Polardarstellung $\vec{r}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u\\v\\f(u,v)\end{pmatrix}\curvearrowright\vec{r}_u=\begin{pmatrix}1\\0\\f_u\end{pmatrix},\vec{r}_v=\begin{pmatrix}0\\1\\f_v\end{pmatrix}$

  $|\vec{r}_u\times\vec{r}_v|=|\begin{vmatrix}\vec{i}&1&0\\\vec{j}&0&1\\\vec{k}&f_u&f_v\end{vmatrix}|=|\begin{pmatrix}-f_u\\-f_v\\1\end{pmatrix}|=\sqrt{1+f_u^2+f_v^2}=\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}$

- $z=f(r,\varphi)\curvearrowright$ P.d. $\vec{r}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u\cos v\\u\sin v\\f(u,v)\end{pmatrix}$

  $\curvearrowright\vec{r}_u=\begin{pmatrix}\cos v\\\sin v\\f_u\end{pmatrix},\vec{r}_v=\begin{pmatrix}-u\sin v\\u\cos v\\f_v\end{pmatrix}\curvearrowright$

  $|\vec{r}_u\times\vec{r}_v|=|\begin{vmatrix}\vec{i}&\cos v&-u\sin v\\\vec{j}&\sin v&u\cos v\\\vec{k}&f_u&f_v\end{vmatrix}|=|\begin{pmatrix}\sin v\cdot f_v-u\cos v\cdot f_u\\-\cos v\cdot f_v-u\cdot\sin v\cdot f_u\\u\end{pmatrix}|$

- Kugel $M=0$, Radius R, Kugelkoordinaten $r=R=const.\curvearrowright$ (vgl. auch Beispiel 1, Kapitel 5.1.1.), P.d:

  $$\left.\begin{aligned}x&=R\sin\vartheta\cos\varphi\\y&=R\sin\vartheta\sin\varphi\\z&=R\cos\vartheta\end{aligned}\right|\begin{aligned}0\le\varphi\le 2\pi\\0\le\vartheta\le\pi\end{aligned}$$

  $\vec{r}_\vartheta=\begin{pmatrix}R\cos\vartheta\cos\varphi\\R\cos\vartheta\sin\varphi\\-R\sin\vartheta\end{pmatrix},\vec{r}_\varphi=\begin{pmatrix}-R\sin\vartheta\sin\varphi\\R\sin\vartheta\cos\varphi\\0\end{pmatrix}$

  $\curvearrowright|\vec{r}_\vartheta\times\vec{r}_\varphi|=\begin{pmatrix}R^2\sin^2\vartheta\cos varphi\\R^2\sin^2\vartheta\sin\varphi\\R^2\cos\vartheta\\R^2\cos\vartheta\sin\vartheta\end{pmatrix}|$

  $=\sqrt{R^4\sin^4\vartheta+R^4\cos^2\vartheta\sin^2\vartheta}=R^2\sin\vartheta$

Zusammenfassung

Fläche	dF
$z = f(x,y)$ ... explizite. kar. Dar.	$dF = \sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,dx\,dy$
$z = f(r,\varphi)$ ... expl. Zyl. Dar.	$dF = \sqrt{r^2(1+f_r^2)+f_\varphi^2}\,dr\,d\varphi$
speziell Rot.flächen $z = f(r,\varphi) = g(r), \varphi \in [0;2\pi]$	$dF = r \cdot \sqrt{1+(g^2(r))^2}\,dr\,d\varphi$
Kugel, $M = 0$, Rad. R (Kugelkoord.)	$dF = R^2 \sin\vartheta\,d\varphi\,d\vartheta$

6.3 Raumintegrale

6.3.1 Begriff

Vorbetrachtung

- Geg.
  1. Abgeschlossener, beschränkter Bereich $B \subset \mathbb{R}^3$
  2. Dichte $\varrho = \varrho(x,y,z) \geq 0$, stetig für $(x,y,z) \in B$
- Ges: Masse m des Körpers B
  Zerlegung von B in kleine Teile B_j mit dem Volumen Δb_i
  $\curvearrowright m = \sum\limits_i \Delta m_i \approx \sum\limits_i \varrho(\underbrace{\xi_i,\eta_i,\zeta_i}_{\in B_i})\Delta b_i$
  Grenzübergang $\max_i \Delta b_i \to 0 \curvearrowright$ Grenzwert m existiert unabhängig von Zerlegungsfolge
- Schreibweise $m = \iiint\limits_B \varrho(x,y,z)\,db$ ... Raumintegral

6.3.2 Reduktion auf Dreifachintegrale

- Gegeben sei ein Bereich B_{xy} in der $x-y$-Ebene und zwei Funktionen g_1 und g_2 mit $g_1(x,y) \leq g_2(x,y)$ für $(x,y) \in B_{xy}$
- Der räumliche Bereich B habe $z = g_1(x,y)$ und $z = g_2(x,y)$ als untere bzw. obere Begrenzung. Alle weiteren Begrenzungsflächen seien orthogonal zur $x-y$-Ebene (Zylinderflächen auf dem Rand von B_{xy}). Dann

$$B = \{(x,y,z)|(x,y) \in B_{xy}, g_1(x,y) \leq z \leq g_2(x,y)\}$$

  ... Normalbereich bzgl. $x-y$-Ebene
- Normalprojekt von B auf $x-y$-Ebene liefert den ebenen Bereich B_{xy}
- Falls (z.B.) B_{xy} ein Normalbereich bzgl. der x-Achse ist, d.h. $B_{xy} = \{(x,y)|a \leq x \leq b\ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$ dann

$$\iiint\limits_B f(x,y,z)\,db = \int\limits_{x=a}^{b} \int\limits_{\varphi=\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \int\limits_{z=g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$$

Diskussion

1. Zylinderfläche kann ganz oder teilweise entfallen.

2. Anstelle der Projektion auf $x - y$-Ebene auch $x - z$- bzw. $y - z$-Ebene möglich (günstig, falls außer 2 Begrenzungsflächen alle übrigen senkrecht auf der entsprechenden Ebene stehen)
   Denkbar sind 3 Varianten B_{xy}, B_{xz} bzw. B_{yz} für die 1. Projektion, jeweils 2 Varianten für die Projektion dieser ebenen Bereich auf eine Achse $\curvearrowright$ 6 mögliche Variante für die Integrationsreihenfolge (i. allg. nicht alle gleich „günstig“)

3. Auch hier gilt stets:
   Außen konstante Grenzen, in der Mitte (bzw. innen) können die Grenzen abhängen von der bzw. den äußeren Integrationsvariablen
   Berechnung: Von innen nach außen

4. Kartesische Korrdinaten $db = dx\,dy\,dz$

6.3.3 Koordinatentransformationen

(analog zum zweidimensionalen Fall)

allg.$x = x(u, v, w)$ $y = y(u, v, w)$ $z = z(u, v, w)$	$db = \left\| \begin{vmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \\ x_w & y_w & z_w \end{vmatrix} \right\| du\,dv\,dw$
speziell$a) Zyl.koord. x = r\cos\varphi$ $y = r\sin\varphi$ $(z = z)$	$db = r\,dr\,d\varphi\,d\varphi$
$b)$ Kugelkoord. $x = r\sin\vartheta\cos\varphi$ $y = r\sin\vartheta\sin\varphi$ $z = r\cos\vartheta$	$db = r^2\sin\vartheta\,dr\,d\varphi\,d\vartheta$

6.3.4 Anwendungen

Masse des Körpers B mit der Dichte $\varrho = \varrho(x,y,z)$	$m = \iiint\limits_B \varrho(x,y,z)\,db$
Volumen $[B]$ von B	$[B] = \iiint\limits_B db$ (Integrand 1)
geometrischer Schwerpunkt $S(x_s, y_s, z_s)$ von B	$x_s = \frac{1}{[B]} \iiint\limits_B x\,db$, $y_s = \frac{1}{[B]} \iiint\limits_B y\,db, z_s = \frac{1}{[B]} \iiint\limits_B z\,db$
Massenschwerpunkt von B bei Dichte $\varrho = \varrho(x,y,z)$ ($\varrho = const \curvearrowright$ geometr. Schwerp.)	$x_s = \frac{1}{m} \iiint\limits_B x\varrho\,db$, $y_s = \frac{1}{m} \iiint\limits_B y\varrho\,db$, $z_s = \frac{1}{m} \iiint\limits_B z\varrho\,db$,
Trägheitsmoment I_g bei Rotation um Achse g	$I_g = \iiint\limits_B d^2(x,y,z)\varrho(x,y,z)\,db$ speziell : a) $g \dots z$-Achse: $d^2 = x^2 + y^2$ b) $g \dots x$-Achse $d^2 = y^2 + z^2$ c) $g \dots y$-Achse: $d^2 = x^2 + z^2$
Integralmittelwert von f und B	$\frac{1}{[B]} \iiint\limits_B f(x,y,z)\,db$

Diskussion (Trägheitsmoment)

1. Kinetische Energie eines sich geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit v bewegenden Körpers mit der Masse $m : W = \frac{1}{2}mv^2 \curvearrowright$

2. Kinetische Energie eines rotierenden Körpers (konstante Winkelgeschw. $\omega(= \frac{2\pi}{T})$:
   $W_{rot} = \sum\limits_i \Delta W_i \approx \sum\limits_i \frac{\Delta m_i}{2} (\underbrace{\omega d_i}_{v_i})^2 = \frac{\omega^2}{2} \sum\limits_i d_i^2 \varrho_i \Delta b_i$
   $\curvearrowright W_{rot} = \frac{1}{2} I_g \cdot \omega^2$

7 Gewöhnliche Differentialgleichungen

7.1 Grundbegriffe

Vorbetrachtung Beispiel 1: Federmasse m an Schraubenfeder mit der Federkonstante c_F Anfangsauslenkung zum Zeitpunkt $t = 0, y_0$, Ruhelage 0
Gesucht: Zeitverlauf $y = y(t)$ der Bewegung der Punktmasse.
Grundgesetz der Mechanik: $F = m \cdot \ddot{y}$ hier
freie ungedämpfte Schwingung $F = -c_F y$ (Hookesches Gesetz)

$$m\ddot{y} = -c_F y | y(0) = y_0, \dots y(0) = 0 \tag{46}$$

Begriff Eine Differential (DGL) ist eine Bestimmungsgleichung für eine unbekannte Funktion, die mindestens eine Ableitung der gesuchten Funktion enthält

2 Grundarten

1. Gesuchte Funktion $y = y(x)$, d.h. eine unabhängige Variable: Gewöhnliche DGL
2. Gesuchte Funktion $u = u(x, y)$ bzw. $u = u(x_1, \dots, x_n)$, d.h. mindestens 2 unabhängige Veränderliche $\curvearrowright$ Ableitungen sind partielle Ableitungen: Partielle DGL

Beispiel 2 $y' = x^2$, gewöhnliche DGL für Funktion $y = y(x)$
Lösung: $y = \int x^2\,dx = \underline{\underline{\frac{x^3}{3} + c}}$, d.h. Lösung ist Kurvenschar mit einem freien Parameter c

Beispiel 3 $u_x = xy \dots$ partielle DGL für Funktion $u = u(x, y)$
Lösung: $u = \frac{x^2}{2}y + c(y)$
Bemerkung: Im folgenden nur gewöhnliche DGLn.

- Allg. Form einer gewöhnlichen DGL n-ter Ordnung
  implizit: $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$
  explizit: $y^{(n)} = f(x, y, , y', \dots, y^{(n-1)}$
- Die allg. Lösung ist eine Kurvenschar mit n Parametern (Integrationskonstanten)
- Anfangswertproblem (AWP): n zusätzliche Bedingungen $y = (x_0) = a_0, y'(x_0) = a_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = a_{n-1}$ (Anfangsbedingung $[AB]$ Funktionswert und Ableitungen an einer festen Stelle x_0 vorgeben, vgl. (1))

7.2 Differentialgleichungen 1. Ordnung

Allg. Form

$$F(x, y, y') = 0 \text{ (implizit)}$$
$$y' = f(x, y) \text{ (explizit)}$$

7.2.1 Geometrische Interpretation

Gegeben: $y' = f(x, y), (x, y) \in B$

Richtungsfeld: In jedem Punkt $(x, y) \in B$ Richtung mit dem Anstieg $f(x, y) =: \tan\alpha$ markieren

Gesucht: Kurven $y = y(x)$, die sich in jedem Punkt diesem Richtungsfeld anpassen, d.h. die vorgegebene Ableitung besitzen $y' = f(x, y)$ (Lösungskurven der DGL)

7.2.2 DGLn mit trennbaren Variablen

Typ $y' = f(x) \cdot g(y)$	Bsp 1 $y' = xy^2, y(1) = -2$
Lösungsmethode $\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$	$\frac{dy}{dx} = xy^2$
Trennung der Verändl. (TdV) beide Seiten integr. $\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx$	$\int \frac{dy}{y^2} = \int x\,dx$ $-\frac{1}{y} = \frac{x^2}{2} + c$ allg. Lösung, implizit
Falls möglich Auflösen n. y:$y = y(x) = \varphi(x,c)$	$y = -\frac{1}{\frac{x^2}{2}+c}$ allg. Lösung expl.
Untersuchung von $g(y) = 0 \curvearrowright$ Nebenlös.	$y^2 = 0 \Leftrightarrow y = 0$ (erfüllt ebenfalls DGL $\curvearrowright$ Nebenlös
Bei AWP: AB erfüllen	$x = 1, y = -2,$ einsetz. in allg. Lös. (impl) $\curvearrowright \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + c \curvearrowright c = 0 \curvearrowright$ Lösung der AWP $: y = -\frac{2}{x^2}$

Diskussion

1. Rechtfertigung des Lösungsschritt (beide Seiten integrieren)

$$G(y) = F(x) + c \tag{47}$$

   diff nach x $\frac{dG}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dF}{dx}$
   $\curvearrowright \frac{1}{g(y)} \cdot y' = f(x) \curvearrowright y' = f(x) \cdot g(y)$, d.h. (47) erfüllt die DGL.

2. Spezialfälle:

$$y' = f(x), \text{ d.h. } g(y) = 1$$
$$y' = g(y), \text{ d.h. } f(x) = 1$$
$$y' = \frac{f(x)}{h(y)} = f(x) \cdot \frac{1}{h(y)}, \text{d.h. } g(y) = \frac{1}{h(y)}$$

Beispiel 2 Ein Körper habe zum Zeitpunkt $t = 0$ die Temperatur $T_0 = 100°$C. Die Temperatur der umgebenen Luft $T_L = 20°$ C (= const.) . Zur Zeit $t_1 = 10$ min hat sich der Körper auf $T_1 = 60°$ abgekühlt

1. Man ermittle die Temperatur T als Funktion der Zeit t
2. Zu welchem Zeitpunkt t_2 beträgt die Temperatur des Körpers $T_2 = 25°C$?

Lösung

1. NEWTONsches Abkühlungsgesetz: Geschwindigkeit der Abkühlung proportional Temperaturdifferenz zum Medium
   $T = T(t) \ldots$ Temp, t.. Zeit
   $\frac{dT}{dt} = \alpha\cdot(T - T_L), \underbrace{T(0) = T_0}_{AB}, \quad \underbrace{T(10) = T_1}_{\text{zur Ermittlung von } \alpha}$ TdV: $\int \frac{dT}{T-T_L} = \int \alpha\,dt = \ln|T - T_L| = \alpha t + c^*$

...
Also allg. Lösung:

$$T = T_L + ce^{\alpha t}$$

Beispiel 2: $\frac{dT}{dt} = \alpha \cdot (T - T_L); T(0) = T_0, T(10) = T_1$
allg. Lösung: $T = T_L + ce^{\alpha t}$

- AB: $t = 0, T = 100 \curvearrowright c = 80$
- Bestimmung von $\alpha : t = 10, T = 60 \curvearrowright 60 = 20 + 80e^{\alpha \cdot 10}$
  $\curvearrowright \alpha = \frac{1}{10} \ln \frac{1}{2} < 0$
  Lösung $T = 20 + 80e^{t \cdot \frac{1}{10} \ln \frac{1}{2}} = 20 + 80 \cdot (\frac{1}{2})^{\frac{t}{10}}$

2. Auflösung nach t
   $t = 10 \cdot \frac{\ln(\frac{T-20}{80})}{\ln(\frac{1}{2})} \underbrace{\Rightarrow}_{T=T_2=25} t = t_2 = 40(min)$

7.2.3 Lineare DGLn (1. Ordnung)

Normalform:

$$y' + a(x)y = h(x) \quad \begin{cases} \text{homogen} & \text{falls} \quad h(x) = 0, \forall x \\ \text{inhomogen} & \text{sonst} \end{cases}$$

Diskussion

1. Linear bezieht sich auf y und y' (1. Potenz, Faktoren höchstens von x abhängig!). Nicht immer liegt Normalform vor.

Beispiel

$y' + x^2y - \sin x = 0$	linear, inhomogen,$h(x) = \sin x$
$x^2y' = y$	linear,homogen
$y' + e^{xy} \cdot y = \cos x$	nicht linear
$y' \cdot y = e^x$	nicht linear

2. $h(x)$ heißt auch Störfunktion

3. Lösungsmethode
   a) Bestimmung der allg. Lösung y_h der zugehörigen homogenen DGL $y' + a(x)y = 0$ mittels TdV
   b) Bestimmung einer partikulären Lösung y_p der inhomogenen DGL mittels Variation der Konstanten, vgl. Beispiel 3
   c) Allg. Lösung der inhomogenen DGL: $y = y_h + y_p$
   d) Falls AWP: AB erfüllen

Beispiel 3 $y' + \frac{1}{x} \cdot y = x$, lin. DGL, 1. Ordnung, inhomogen

1. Zugehörige homogene DGL: $y' + \frac{1}{x} y = 0 \curvearrowright$
   $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x} \cdot y \overbrace{\curvearrowright}^{TdV} \int \frac{dy}{y} = \int -\frac{1}{x}\, dx$
   $\curvearrowright \ln|y| = -\ln|x| + c^* \;\; |y| = e^{-\ln|x| + c^*} = e^{-\ln|x|} \cdot e^{c^*}$
   $\curvearrowright |y| = \frac{1}{|x|} \cdot e^{c^*}$
   $\curvearrowright y_h = c \cdot \frac{1}{x} (c = \pm e^{c^*})$ (wie im Beispiel 2 zunächst $c \neq 0$, Nebenlösung $y_h = 0$ ergibt sich für $c = 0$, also $c \in \mathbb{R}$
   y_h hat stets die Gestalt $y_h = c \cdot$ Fnkt(x)

2. Ansatz $y_p = c(x) \cdot \frac{1}{x}$ (Variation der Konstanten $c \to c(x)$
   Einsetzen des Ansatzen (einschließlich y_p' in inhomogene DGL
   $y_p' = c'(x) \cdot \frac{1}{x} - c(x) \cdot \frac{1}{x^2} \curvearrowright$
   $c'(x) \cdot \frac{1}{x} - c(x) \cdot \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} c(x) \frac{1}{x} = x$
   $c'(x) \cdot \frac{1}{x} = x \curvearrowright c'(x) = x^2 \curvearrowright c(x) = \frac{x^3}{3} + K (K = 0)$
   $\curvearrowright c(x) = \frac{1}{3} x^3 \curvearrowright y_p = \frac{1}{3} x^3 \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{3} x^2$

3. $y = y_h + y_p = \frac{c}{x} + \frac{1}{3} x^2$

7.2.4 Einige weitere DGLn 1. Ordnung

1. Ähnlichkeitsdifferentialgleichungen
   a) Typ $y' = f(\frac{y}{x})$, Lösung: Subst. $\frac{y}{x} = u = u(x)$
   $\underbrace{\Rightarrow}_{y = u \cdot x} y' = u'x + u$
   $\curvearrowright$ DGL für $u = u(x)$ mit trennbaren Veränderlichen, …lösen, Rücksubstitution
   b) $y' = f(ax + by + c)$ Lösung: Substituieren $ax + by + c = u = u(x)$
   $\underbrace{\Rightarrow}_{u' = a + by'} y' = \frac{1}{b}(u' - a)$ usw. wie bei a)

   Beispiel 4 Gesucht sind Kurven $y = y(x)$, die alle vom Ursprung ausgehenden Strahlen unter den gleichen Winkel α schneiden (isogonale Trajektorien)
   $\curvearrowright y' = \tan(\varphi + \alpha) = \frac{\tan\varphi + \tan\alpha}{1 - \tan\varphi \cdot \tan\alpha} = \frac{\frac{y}{x} + \tan\alpha}{1 - \frac{y}{x}\tan\alpha} =: f(\frac{y}{x})$

   - Subst. $u = \frac{y}{x}, y' = u'x + u \curvearrowright u'x + u = \frac{u + \tan\alpha}{1 - u\tan\alpha} \ldots r = c \cdot e^{\varphi \cot\alpha}$ (mit $c = e^{-c_2} > 0$) …log Spirale(n)

2. Exakte DGL
   Die DGL $P(x, y) + Q(x, y) y' = 0$ mit $P_y = Q_x$ (in einem einfach zusammenhängenden Gebiet) heißt exakte DGL.
   Lösung: Unter der Bedingung existieren Stammfunkt. $F(x, y)$ mit $F_x = P$ und $F_y = Q$. Die allg. der exakten DGL ist dann $F(x, y) = c$ (Höhenlinien von F)

7.3 Lineare DGL höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Allgemeine Form

$$L[y] := y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = h(x) \tag{48}$$

1. Bestimmung der allg. Lösung y_h der zugehörigen homogenen DGL

$$L[y] = 0 \tag{49}$$

Satz 1 Die Gleichung (49) besitzt n linear unabhängige Lösungen $y_1(x), \ldots, y_n(x)$. Die allg. Lösung von (49) ist dann $y_h = c_1 y_1(x) + \cdots + c_n y_n(x)$.

Diskussion

a) Die MEnge $\{y_1(x), \ldots, y_n(x)\}$ heißt (ein) Fundamentalsystem (FS) von Lösungen der homogenen DGL.

b) Mit dem Ansatz

$$y_h = e^{\lambda x}$$

erhält man die charakteristische Gleichung

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0 \tag{50}$$

Satz 2 Jede m-fache Nullstelle λ_0 des charakteristischen Polynoms liefert folgende Funktion des FS:

λ_0 reell	$\underbrace{e^{\lambda_0 x}, xe^{\lambda_0 x}, x^2 e^{\lambda_0 x}, \ldots, x^{m-1}e^{\lambda_0 x}}_{m \text{ Funktionen}}$
$\lambda_0 = \alpha + i\beta (\beta \neq 0)$ komplex	$e^{\alpha x}\cos(\beta x), xe^{\alpha x}\cos(\beta x), \ldots, x^{m-1}e^{\alpha x}\cos(\beta x)$
$\curvearrowright \bar{\lambda}_0 = \alpha - i\beta$ m-fache Nullst.	$e^{\alpha x}\sin(\beta x), xe^{\alpha x}\sin(\beta x), \ldots, x^{m-1}e^{\alpha x}\sin(\beta x)$

Diskussion

a) Beispiele für die Zuordnung: Lösung der char. GL $\rightarrow$ FS

Lösungen λ_k der char. Gl	FS
$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -1$	$\{\underbrace{1}_{e^{0x}}, e^{2x}, e^{-x}\}$
$\lambda_{1,2} = 0, \lambda_{3,4,5} = 3$	$\{1, x, e^{3x}, xe^{3x}, x^2e^{3x}\}$
$\lambda_{1,2} = 2 \pm 3i$	$\{e^{2x}\cos(3x), e^{2x}\sin(3x)\}$
$\lambda_{1,2} = \pm i, \lambda_{3,4} = \pm i$	$\{\cos x, \sin x, x\cos x, x\sin x\}$

b) $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta \curvearrowright y_h = c_1 e^{(\alpha+i\beta)x} + c_2 e^{(\alpha-i\beta)x} = c_1 e^{\alpha x}(\cos(\beta x) + i\sin(\beta x)) + c_2 e^{\alpha x}(\cos(\beta x) - i\sin(\beta x)) = \underbrace{(c_1 + c_2)}_{c_1^*} e^{\alpha x}\cos(\beta x) + \underbrace{(c_1 - c_2)}_{c_2^*} ie^{\alpha x}\sin(\beta x)$

2. Bestimmung einer partikulären der inhomogenen DGL

   1. Möglichkeit: Variation der Konstanten (stets möglich)

   2. Möglichkeit: Spezielle Ansatz mit unbestimmten Koeffizienten für häufig vorkommende Störfunktionen $\rightarrow$ Koeffizienten vergleichen

Satz 3

a) Die Störfunktion habe die Gestalt

$$h(x) = e^{\alpha x}\underbrace{(P_1(x)\cos(\beta x) + P_2(x)\sin(\beta x))}_{\text{Polynome, } r:= \text{ Max. der beiden Grade}}$$

b) Ferner sei $\varrho \geq 0$ die Vielfachheit von $\alpha+i\beta$ als Nullstelle des charakteristischen Polynoms $p(\lambda)$

   i. 1. Fall $\underbrace{\varrho = 0}_{\text{Normalfall}}$ $\Leftrightarrow \alpha + i\beta$ ist keine Nullstelle des charakt. Polynoms
   $\Rightarrow L[y] = h(x)$ besitzt eine Partikulärlösung der Form

$$y_p = e^{\alpha x}(Q_1(x)\cos(\beta x) + Q_2(x)\sin(\beta x)) \qquad (51)$$

   $Q_1(x), Q_2(x) \ldots$ Polynome vom Grade r mit unbestimmten Koeffizienten

   ii. 2. Fall $\varrho > 0$ (Resonanzfall) $\curvearrowright$ Der Ansatz (51) ist mit x^ϱ zu multiplizieren

Diskussion

a) Beispiele für die Zuordnung: $h(x) \rightarrow$ Ansatz für y_p

Lös. λ_i d. char. GL	$h(X)$	α	β	$\alpha + i\beta$	ϱ	Ansatz für y_p
$\lambda_{1,2,3} = 0, \lambda_4 = -1$	x^2+1	0	0	0	3	$(Ax^2 + Bx + C) \cdot x^3 = Ax^5 + Bx^4 + Cx^3$
$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$	$4e^{-x}$	-1	0	-1	0	Ae^{-x}
$\lambda_{1,2} = \pm 2i, \lambda_3 = 3$	$\sin(3x)$	0	3	$3i$	0	$A\cos(3x) + B\sin(3x)$
$\lambda_1 = -2, \lambda_{2,3} = 0$	x^3e^{-2x}	-2	0	-2	1	$(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)e^{-2x} \cdot x^1 = \ldots$

Anmerkungen

   i. Polynom gleichen Grades, vollständig!

   ii. gleiche e-Funktion

   iii. vollständiger trigonometrischer Ansatz

b) Falls Störfunktion $h(x) = h_1(x) + h_2(x)$, dann Ansatz $y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$ mit y_{p_i} Partikulärlösung von $L[y] = h_i(x)$ $(i = 1, 2)$

3. Wie üblich:

$$y = y_h + y_p$$

Beispiel 1 $y'' - 3y' = -\sin(3x)$

1. char. GL $\lambda^2 - 3\lambda = 0 \curvearrowright \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 3$
   $\curvearrowright$ FS $\{1, e^{3x}\} \curvearrowright \underline{\underline{y_h = c_1 + c_2 e^{3x}}}$

2. $h(x) = -\sin(3x) \curvearrowright \alpha = 0, \beta = 3 \curvearrowright \alpha + i\beta = 3i \curvearrowright \varrho = 0$ (Keine Resonanz, denn $3i$ ist keine Lösung der char. GL)
   $\curvearrowright$ Ansatz: $y_p = A\cos(3x) + B\sin(3x)$ (vollständig!)
   $y_p' = -3A\sin(3x) + 3B\cos(3x)$
   $y_p'' = -9A\cos(3x) - 9B\sin(3x)$

   Einsetzen in inhomogene DGL
   $\underbrace{-9A\cos(3x) - 9B\sin(3x)}_{y_p''} + \underbrace{9A\sin(3x) - 9B\cos(3x)}_{-3y_p'} = -\sin(3x)$
   Koeffizienten Vergleich: $\cos(3x) : -9A - 9B = 0 \curvearrowright A = -B$
   $\sin(3x) : -9B + 9A = -1 \curvearrowright -18B = -1 \curvearrowright B = \frac{1}{18} A = -\frac{1}{18}$
   $\curvearrowright \underline{\underline{y_p = -\frac{1}{18}\cos(3x) + \frac{1}{18}\sin(3x)}}$

3. $y = y_h + y_p = \ldots$

Beispiel 2 $y^{(4)} - 3y''' = 36x^2 - 5$

1. char. Gleichung $\lambda^4 - 3\lambda^3 = 0 \curvearrowright \lambda^3(\lambda - 3) = 0$
   $\curvearrowright \lambda_{1,2,3} = 0, \lambda_4 = 3 \curvearrowright \text{FS}\{1, x,^2, e^{3x}\}$
   $\curvearrowright \underline{\underline{y_h = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 e^{3x}}}$

2. $h(x) = 36x^2 - 5 \curvearrowright \alpha = 0, \beta = 0, \alpha + i\beta = 0 \curvearrowright \varrho = 3$
   Ansatz: $y_p = (Ax^2 + Bx + C) \cdot x^3 = Ax^5 + Bx^4 + Cx^3$
   $y_p' = 5Ax^4 + 4Bx^3 + 3Cx^2, y_p'' = 20Ax^3 + 12Bx^2 + 6Cx$
   $y_p''' = 60Ax^2 + 24Bx + 6C, y_p^{(4)} = 120Ax + 24B$
   Einsetzen: $120Ax + 24B - 180Ax^2 - 72Bx - 18C = 36x^2 - 5$
   Koeff. vgl.:

$$\begin{aligned} x^2 &: -180A = 36 && \curvearrowright A = -\frac{1}{5} \\ x^1 &: 120A - 72B = 0 && \curvearrowright B = -\frac{1}{3} \\ x^0 &: 24B - 18C = -5 && \curvearrowright C = -\frac{1}{6} \end{aligned}$$

$$\curvearrowright \underline{\underline{y_p = -\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{6}x^3}}$$

3. $y = y_h + y_p = \ldots$

Anwendung Federschwingungsgleichung
Schraubenfeder, Federkonstante $c_F > 0$, vgl. Bsp. 1 (7.1.)

$$\text{Grundgesetz der Mechanik: } m\ddot{y} = K = K(y, \dot{y}, t)$$

$$m\ddot{y} = \underbrace{-\alpha\dot{y}}_{\text{Reibungskraft } \sim\dot{y}} \quad \underbrace{-c_F y}_{\text{Rückzugskraft } \sim y} \quad + \quad \underbrace{F(t)}_{\text{äußere Kraft}} \quad | : m$$

$\curvearrowright \ddot{y} + 2\gamma\dot{y} + \omega_0^2 = h(t)$ mit $\gamma := \frac{\alpha}{2m} > 0, \omega_0^2 := \frac{c_F}{m}$
$AB : y(0) = y_0$ (Anfangsauslenkung) $h(t) = \frac{F(t)}{m}$
$\dot{y}(0) = v_0$ (Anfangsgeschwindigkeit)

1. Fall $h(t) = 0$ (keine äußere Kraft, freie Schwingung)
DGL: $\ddot{y} + 2\gamma\dot{y} + \omega_0^2 y = 0$ (homogen, d.h. allg. Lös $y = y_h$)
char. Gl. $\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0 \curvearrowright \lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$

Fall 1a $\gamma = 0$ (keine Reibung) $\curvearrowright$ freie ungedämpfte Schwingung
$\curvearrowright \lambda_{1,2} = \pm\omega_0^2 i \curvearrowright FS\{\cos(\omega_0 t), \sin(\omega_0 t)\}$
$\curvearrowright y = y_h = c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \sin(\omega_0 t)$
$AB \curvearrowright c_1$ und c_2 berechenbar, z.B. $v_0 = 0 \curvearrowright c_1 = y_0, c_2 = 0$
$\curvearrowright \underline{\underline{y = y_0 \cos(\omega_0 t)}}, T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ ... Schwingungsdauer, ω_0 ... Eigenfrequenz

Fall 1b $0 < \gamma < \omega_0$ (kleine Dämpfung, freie gedämpfte Schwingung)
$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \underbrace{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}_{\omega_1} i \curvearrowright FS\{e^{-\gamma t}\cos(\omega_1 t), e^{-\gamma t}\sin(\omega_1 t)$
$\curvearrowright y = y_h = (c_1 \cos(\omega_1 t) + \sin(\omega_1 t)e^{-\gamma t} = Ae^{-\gamma t}\cos(\omega_1 t - \varphi)$
$\omega_1 < \omega_0 \curvearrowright T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} > T_0$, Skizze für $v_0 = 0$

Fall 1c $y \geq \omega_0$ (starke Dämpfung)
$\curvearrowright \lambda_1, \lambda_2$ beide reell und negativ, nicht periodisches Abklingen, Kriechfall, Nullpunkt durchtritt möglich, wenn $v_0 \cdot y_0 < 0$

2. Fall äußere Kraft $F(t) \curvearrowright$ erzwungene Schwingung

- hier nur der Fall $\gamma = 0, h(t) = a\sin(\omega_0 t)$
  DGL: $\ddot{y} + \omega_0^2 y = a\sin(\omega_0 t)$
  (d.h. keine Dämpfung, periodische Kraft Frequenz, Eigenfrequenz ω_0)

- $\lambda_{1,2} = \pm\omega_0 i$ (s Fall 1a)

- y_p ermitteln: $h(t) = a\sin(\omega_0 t), \alpha = 0, \beta = \omega_0, \alpha + i\beta = i\omega_0 \curvearrowright \varrho = 1$ (Resonanzfall)
  Ansatz: $y_p = (A_1 \cos(\omega_0 t) + A_2 \sin(\omega_0 t))t$, einsetzen in inhomogene DGL und Koeff. vgl. liefert $A_2 = 0, A_1 = -\frac{a}{2\omega_0} \curvearrowright y_p = -\frac{at}{2\omega_0}\cos(\omega_0 t)$

$\curvearrowright$ allg. Lösung $y = c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \sin(\omega_0 t) - \underbrace{\frac{at}{2\omega_0} \cos(\omega_0 t)}_{y_p}$

Resonanzkatastrophe für große t

7.4 Verschiedenes

7.4.1 Potenzreihenansatz

Ansatz

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

führt oft zum Ziel, wenn andere Methoden versagen.

Prinzip Ableitungen $y', y'', \dots$ durch gliedweise Differenzieren bilden, in die DGL einsetzen und Koeff. vergleich durchführen. Bei AWP für x_0 die Anfangsstelle wählen.

Beispiel 1

$$y' = x^2 + y^2 \quad , y(0) = 0$$

Geometrische Veranschaulichung, vgl. Kaptiel 7.1.

Zweckmäßig Isoklinen (= Kurven, die alle Punkte (x, y) verbinden, in denen der Anstieg des Richtungsfeldes den gleichen Wert a besitzt, hier $f(x, y) = x^2 + y^2 = a$, Kreise um 0 mit Radius $\sqrt{a}$ $(a > 0)$

Beispiel 1 $y' = y^2 + x^2, y(0) = 0$

Ansatz: $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots \to$ Cauchy-Product $\curvearrowright y^2$
$y^2 = a_0^2 + 2a_0 a_1 x + (2a_0 a_2 + a_1^2) x^2 + (2a_0 a_3 + 2a_1 a_2) x^3 + (2a_0 a_4 + 2a_1 a_4 + 2a_1 a_3 + a_2^2) x^4 + \dots$
$y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + 5a_5 x^4 + \dots$
AB: $y(0) = 0 \curvearrowright a_0 = 0$

Koeff. vgl.	$y' = x^2 + y^2$	
x^0	$a_1 = a_0^2$	$\curvearrowright a_1 = 0$
x^1	$2a_2 = 2a_0 a_1$	$\curvearrowright a_2 = 0$
x^2	$3a_3 = 2a_0 a_2 + a_1^2 + 1$	$\curvearrowright a_3 = \frac{1}{3}$
x^3	$4a_4 = 2a_0 a_3 + 2a_1 a_2$	$\curvearrowright a_4 = 0$
x^4	$5a_5 = 2a_0 a_4 + 2a_1 a_3 + a_2^2$	$\curvearrowright a_5 = 0$
x^5	$6a_6 = 2a_0 a_5 + 2a_1 a_4 + 2a_2 a_3$	$\curvearrowright a_6 = 0$
x^6	$7a_7 = 2a_0 a_6 + 2a_1 a_5 + 2a_2 a_4 + a_3^2$	$\curvearrowright a_7 = \frac{1}{63}$
$\vdots$	analog: $a_8 = a_9 = a_10 = 0$	
x^{10}	$11 a_{11} = 2(\dots + a_3 a_7 + \dots) + a_5^2$	$\curvearrowright a_{11} = \frac{2}{11} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{63} = \frac{2}{2079}$

$\curvearrowright y = \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{63} x^7 + \frac{2}{2079} x^{11} + \dots$

Bemerkung Der geometrische Ansatz eignet sich als Start für verschiedene numerische Verfahren, wie das Polygonzug-Verfahren von EULER und das RUNGE-KUTTA-Verfahren

7.4.2 Sukzessive Approximation

Satz 1 (Existenz- und Eindeutigkeitssatz von PIRCARD-LINDELÖF)
Die Funktion $f(x,y)$ sei in einem Bereich $B = \{(x,y) : |x - x_0| \le a, |y - y_0| \le 6\}$ der x-y-Ebene stetig. Ferner gelte: $|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \le K \cdot |y_1 - y_2|$. Dann gibt es in einer Umgebung von x_0 genau eine Lösung $y = y(x)$ der DGL: $y' = f(x,y)$ mit $y(x_0) = y_0$.

Methode der sukzessiven Approximation

- Geg. DGL
$$y' = f(x,y), AB : y(x_0) = y_0 \tag{52}$$
f erfülle die Vorraussetzungen des Satzes 1
- Integration liefer die Integralgleichung
$$y(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt$$
- $y_n(x)$ sei folgende iterativ berechnete Funktionenfolge:
$y_0(x) = y_0 = \text{CONST}, y_1(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y_0(t))\, dt, \dots$
$$y_n(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t))\, dt, \dots \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$
- Dann konvergiert $y_n(x)$ im Intervall $[x_0 - a, x_0 + a]$ gleichmäßig gegen die (eindeutige) Lösung von (52): $\lim\limits_{n\to\infty} y_n(x) = y(x)$

Beispiel 2 $y' = x^2 + y^2, y(0) = 0$ (vgl. Beispiel 1)
$y_0(x) = 0, y_n(x) = \int\limits_0^x (x^2 + (y_{n-1}(x))^2)\, dx (n = 1, 2, \dots)$
Also: $y_0(x) = 0, y_1(x) = \int\limits_0^x (x^2 + 0^2)\, dx = \frac{x^3}{3}$
$y_2(x) = \int\limits_0^x (x^2 + \underbrace{(\frac{x^3}{3})^2}_{\frac{x^6}{9}})\, dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63}$
$y_3(x) = \int\limits_0^x (x^2 + \underbrace{(\frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63})^2}_{\frac{x^6}{9} + \frac{2x^10}{3\cdot 63} + \frac{x^{14}}{63^2}})\, dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63} + \frac{2x^{11}}{2079} + \frac{x^{15}}{59525}$

Das letzte (Beispiel) Geg: Kreisförmiger See, in der Mitte befindet sich auf einer kleinen Insel I ein Schiffbrüchiger (S), der mit einer (Dauer-)Geschwindigkeit von $v_0 = 1$ ($\frac{m}{s}$) schwimmen kann. Am Rande lauert ein Menschenfressender (M), der mit einer Geschwindigkeit von $v_1 = 4\ \frac{m}{s}$ laufen kann. Wie kann S den Rand gefahrlos erreichen?

1. Versuch (nur gedanklich) geradlinig schwimmen
$t_S = \frac{R}{v_0}$ (Schwimmer)
Menschenfresser: $t_M = \frac{\pi R}{v_1} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{R}{v_0} < t_S$
Wird gefressen

2. Versuch (zunächst) so schwimmen, dass stets die Insel zwischen M und S ist
konstante Winkelgeschw. $\varphi = \omega \cdot t$
$a(t) =$ Abstand $\overline{SI}$ zur Zeit t

$$\begin{aligned} x &= -a(t)\cos(\omega t) \\ y &= -a(t)\sin(\omega t) \end{aligned} \tag{53}$$

Geschwindigkeit von $S : \vec{v} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}$ mit $\dot{x} = -\dot{a}\cos(\omega t) + a\omega\sin(\omega t), \dot{y} = -\dot{a}\sin(\omega t) - a\omega\cos(\omega t)$
$|\vec{v}|^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{a}^2 + a^2\omega^2 = \text{CONST}(= v_0^2))|$diff nach t
(Kettenregel) $a\dot{a}\ddot{a} + 2a \cdot \dot{a}\omega^2 = 0, AB : a(0) = 0, \dot{a}(0) = v_0$

- 1. Fall : $\dot{a} = 0$ erfüllt, keine Lösung der AWAufgabe
- 2. Fall: $\ddot{a} + \omega^2 a = 0$ (lin. DGL , 2. Ordnung, mit konst. Koeff., homogen)

char Gl. $\lambda^2 + \omega^2 = 0 \curvearrowright \lambda_{1,2} = \pm i\omega \curvearrowright FS\{\cos(\omega t), \sin(\omega t)\}$
$\curvearrowright a(t) = c_1\cos(\omega t) + c_2\sin(\omega t)$ (allg. Lösung)
$AB :\curvearrowright c_1 = 0, c_2 = \frac{v_0}{\omega} = \frac{v_0}{\frac{v_1}{R}} = \frac{R}{4} \curvearrowright$

$$a(t) = \frac{R}{4}\sin(\omega t) \tag{54}$$

maximaler Abstand ($= \frac{\pi}{4}$) für $\omega t = \frac{\pi}{2} \curvearrowright a(t) = \frac{R}{4}, \varphi(t) = \omega t = \frac{\pi}{2}$
neuer Start: $t_S = \frac{3R}{4v_0}, t_M = \frac{\pi R}{4v_0} > t_S \to$ OK
Welche Kurve beschreibt S zunächst Einsetzen von (54) in (53)
$\curvearrowright x = -\frac{R}{4}\sin(\omega t)\cos(\omega t) = -\frac{R}{8}\sin(2\omega t), y = -\frac{R}{4}\sin^2(\omega t) = -\frac{R}{8} + \frac{R}{8}\cos(2\omega t)$
$x^2 + (y + \frac{R}{8})^2 = (\frac{R}{8})^2)$, Kreis $M(0, -\frac{R}{8})$